Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Wintersemester 2008/09

Prof. Dr. B. Schweizer Dr. M. Lenzinger

1) Logische Umformulierung (2P je Teilaufgabe).

Geben Sie je zwei äquivalente Umformulierungen für

a) $\neg(A \Rightarrow B)$

b) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

2) Beweistechniken (1P je Teilaufgabe).

Wir schreiben $a|b$, falls a ein Teiler von b ist, falls also $b = n \cdot a$ für eine ganze Zahl n. Beweisen Sie die Wahrheit oder die Falschheit der folgenden Aussagen über natürliche Zahlen m.

a) $\forall m : \quad 3|m \Rightarrow 3|m^2$

b) $\forall m : \quad 3|m^2 \Rightarrow 3|m$

c) $\forall m : \quad 9|m \Rightarrow 9|m^2$

d) $\forall m : \quad 9|m^2 \Rightarrow 9|m$

3) Rechnen mit Mengen (1P je Teilaufgabe).

Sei I eine Indexmenge. Seien $A, B, C, M,\ A_i, i \in I$ Mengen mit $A_i \subset M\ \forall i \in I$. Für eine Menge $N \subset M$ bezeichnen wir mit $\mathcal{C}(N) := M \setminus N$ das Komplement von N in M. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) $(A \backslash B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \cup C)$

b) $(A \backslash B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$

c) $\mathcal{C}(\cup_{i \in I} A_i) = \cap_{i \in I}(\mathcal{C} A_i)$.

4) Größe von Mengen (4P).

Sei M eine Menge mit n Elementen. Wie viele Elemente hat die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ für $n = 2$ und $n = 3$? Was ist die Formel für allgemeines n? Beweisen Sie Ihre Vermutung.

5) Summenformeln (2P je Teilaufgabe).

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion für natürliche Zahlen n:

a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$

b) $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ für $q \neq 1$

6) Summen- und Produktformel (2P je Teilaufgabe).

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion für natürliche Zahlen n:

a) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$

b) $\prod_{k=0}^{n}(1 + q^{2^k}) = \frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q}$ für $q \neq 1$

Abgabe am 28.10.2008 im Tutorium.

Aktuelle Übungsblätter auf
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsi/schweizer/uebungen-ana1-2008.html`