Übungsblatt 2 28.10.2008

Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Wintersemester 2008/09

Prof. Dr. B. Schweizer Dr. M. Lenzinger

1) Mengen und Abbildungen (2P je Teilaufgabe).

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung, $A, B \subset X;\ A', B' \subset Y$ beliebige Mengen. Beweisen Sie:

a) $f(A \cap B) \subset (f(A) \cap f(B))$

b) $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$.

2) $\mathbb{R}$ als metrischer Raum (2P je Teilaufgabe).

Sei E eine beliebige Menge und $d : E \times E \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, die für beliebige $x, y, z \in E$ erfüllt:

1. $d(x, x) = 0$ und $d(x, y) > 0$ für $x \neq y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Eine solche Funktion d nennen wir eine *Metrik* auf E und (E, d) einen *metrischen Raum*. Zeigen Sie:

a) $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto |x - y|$ ist eine Metrik auf $\mathbb{R}$.

b) $|x - y| \geq ||x| - |y||$ und $|xy| = |x||y|$.

3) Schranken, maximale Elemente und Suprema.

Sei $(M, <)$ eine angeordnete Menge und $A \subset M$ eine Teilmenge. Wie lauten die Definitionen von “x ist eine obere Schranke von A in M”, “x ist maximales Element von A” und “$x = \sup A$ in M”?

Wir betrachten nun die folgenden Mengen:

$A_1 = \{1 - \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \cdots\}$ und $A_2 = \{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \mid p^2 \leq 2q^2,\ p, q > 0\}$.

1. Geben Sie für beide Mengen jeweils zwei obere Schranken an. (1P)

2. Besitzen diese Mengen ein maximales Element? (1P)

3. Wie lautet das Supremum von A_1 in $\mathbb{R}$? Sei a das Supremum von A_2 in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie $a^2 = 2$. (2P)

4) Folgen. (3P)

Erraten Sie für die angegebenen Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ einen Limes und beweisen Sie die Konvergenz.

$$a_k = \frac{1}{k^2}\ , \quad a_k = q^k \ \text{ mit } 0 \leq q \leq 1\ , \quad a_k = 1 + \frac{1}{k^2}$$

5) Ein seltsamer Induktionsbeweis. (4P)

Was ist zu dem Nachfolgenden zu sagen?

Behauptung: In einem Hörsaal sind immer nur Männer oder nur Frauen.
Beweis: Wir beweisen per Induktion für jede natürliche Zahl n die Aussage

$A(n)$: Falls n Personen im Hörsaal sind, so sind dies entweder nur Männer oder nur Frauen.

(IV): $A(1)$ ist sicherlich wahr, denn eine Person ist entweder Mann oder Frau.
(IS): Seien $n + 1$ Personen im Hörsaal. Wir schicken eine Person hinaus, es verbleiben n Personen. Nach Induktionsvoraussetzung sind diese Personen alle Männer oder alle Frauen. Um das Geschlecht der hinausgeschickten Person zu überprüfen, lassen wir sie wieder herein und schicken eine andere Person hinaus. Wieder haben nach Induktionsvoraussetzung alle das gleiche Geschlecht, also hat die Person, die zuerst draussen war, dasselbe Geschlecht wie die anderen. q.e.d.

Abgabe am 04.11.2008 im Tutorium.

Aktuelle Übungsblätter auf
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsi/schweizer/uebungen-ana1-2008.html`