Übungsblatt 3 04.11.2008

Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Wintersemester 2008/09

Prof. Dr. B. Schweizer Dr. M. Lenzinger

1) Binomialkoeffizienten.

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ definieren wir die Binomialkoeffizienten

$$\binom{\alpha}{0} := 1 \ \text{ und } \ \binom{\alpha}{k} := \prod_{l=1}^{k} \frac{\alpha + 1 - l}{l} \ \text{ für } \ k \geq 1.$$

Zeigen Sie:

a) $\forall n \in \mathbb{N}: \ \binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & 0 \leq k \leq n, \\ 0 & k > n. \end{cases}$ (1P)

b) $\forall n, k \in \mathbb{N}_\star: \ \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$. (1P)

c) $\forall x, y \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N}: \ (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$. (2P)

2) Geometrisches und arithmetisches Mittel.

Zeigen Sie für reelle Zahlen x, y aus den Anordnungsaxiomen

a) $0 < x, 0 < y \ \Rightarrow \ \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$. (2P)

b) $0 < x \ \Rightarrow \ x + \frac{1}{x} \geq 2$. (2P)

3) Folgen.

Erraten Sie für die angegebenen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Limes und beweisen Sie die Konvergenz. (je 2P)

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \neq 10^k \ \forall k \in \mathbb{N}, \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{sonst.} \end{cases} \qquad\qquad b_n = \frac{5n^2 + n}{2n^2 - 10n}$$

4) Anordnung auf $\mathbb{R}^2$. (3P)

Auf $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ definieren wir eine Relation $(\mathbb{R}^2, <)$ durch

$$(x_1, y_1) < (x_2, y_2) \;:\Leftrightarrow\; x_1 < x_2 \;\text{ und }\; y_1 < y_2 \,.$$

Überprüfen Sie einzeln die Anordnungsaxiome $(A1) - (A3)$ (mit $0 = (0,0) \in \mathbb{R}^2$).

5) Konvergenz der arithmetischen Mittel. (5P)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge und $A(a_1, \ldots, a_n) = \frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n)$ das arithmetische Mittel der ersten n Glieder der Folge. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} A(a_1, \ldots, a_n) = a.$$

Abgabe am 11.11.2008 im Tutorium.