Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Wintersemester 2008/09

Prof. Dr. B. Schweizer Dr. M. Lenzinger

1) Konvergenz von Folgen. (1P pro Folge)

Weisen Sie für die angegebenen Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_\star}$ Konvergenz nach und geben Sie den jeweiligen Limes an. Verwenden Sie dazu entweder das ε-Kriterium oder die Sätze zur Folgenkonvergenz aus der Vorlesung.

$$a_n = \frac{(-1)^n}{8^n - 7^n}\ , \quad a_n = \frac{n^5}{n!}\ , \quad a_n = \frac{2^{n+1}}{1+2^n}\ , \quad a_n = \frac{1}{n+8}\left(\sum_{k=9}^{n} k\right) - \frac{n}{2}\ .$$

2) Folgen. (2P je Teilaufgabe)

a) Zeigen Sie: Für alle reellen Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\max\{x,y\} = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|), \quad \min\{x,y\} = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|).$$

b) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei reelle Zahlenfolgen. Beweisen Sie:

Falls $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, so folgt

$$\lim_{n\to\infty} (\max\{a_n, b_n\}) = \max\{a,b\}\ , \quad \lim_{n\to\infty} (\min\{a_n, b_n\}) = \min\{a,b\}\ .$$

c) Folgern Sie aus b):

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert } \Leftrightarrow (\max\{a_n, 0\})_{n\in\mathbb{N}} \text{ und } (\min\{a_n, 0\})_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergieren.}$$

3) Intervallschachtelung. (4P)

Gegeben sei die Intervallschachtelung $I_n := [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$, $a_n \le b_n$ mit $I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren außerdem $|I_n| := b_n - a_n$. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} |I_n| = 0 \ \Rightarrow\ \exists x \in \mathbb{R} : \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x\}\ .$$

4) Eine rekursiv definierte Folge. (1P je Teilaufgabe)

Wir definieren eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch

$$a_0 := 1 \;\text{ und }\; a_{n+1} := 1 + \frac{1}{a_n}\,.$$

Konvergiert diese Folge? Falls ja, wie lautet der Grenzwert?

Anleitung: Zeigen Sie sukzessive

a) $\forall n \in \mathbb{N}:\; a_n \in [1,2]$.

b) $\forall k \in \mathbb{N}: a_{2k} < a < a_{2k+1}$ mit $a := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

c) Die Folgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ sind monoton.

d) Für $\underline{a} := \lim_{k\to\infty} a_{2k+1}$ und $\overline{a} := \lim_{k\to\infty} a_{2k}$ schließen Sie $\underline{a} = a = \overline{a}$ und daraus die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Abgabe am 18.11.2008 im Tutorium.