Übungsblatt 5 18.11.2008

Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Wintersemester 2008/09

Prof. Dr. B. Schweizer Dr. M. Lenzinger

1) Grenzwerte. (1P je Teilaufgabe)

Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_\star$:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 0,$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n^2+5n+2} - 2n\right) = \frac{5}{4},$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{7n^7(1+\frac{1}{n!})(n^3-n^2)}{(n^3+2)(n^5+\sqrt{n+1})n^2} \right) = 7,$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sum_{k=1}^n (2k-1)}{\sum_{k=1}^n 2k} \right) = 1.$

2) Eine Abschätzung. (2P je Ungleichung)

Zeigen Sie für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}_\star$:

$$2 \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \le 3\,.$$

Hinweis. Verwenden Sie die Bernoulli-Ungleichung sowie Aufgabe 1(c) von Übungsblatt 3. Die dritte Ungleichung folgt unter Verwendung von $2^n < n!$ für alle $n \in \mathbb{N}_\star$.

3) Häufungspunkt und Umgebungen.

a) Zeigen Sie: $a \in \mathbb{R}$ ist genau dann Häufungspunkt der Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, wenn a der Limes einer Teilfolge von (a_k) ist. (2P)

b) Zu $a \in \mathbb{R}$ heißt $U \subset \mathbb{R}$ Umgebung von a in $\mathbb{R}$, falls U offen ist und $a \in U$. Zeigen Sie für Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_n \in \mathbb{R}$:

(1) $x_n \to a \Leftrightarrow \forall U \subset \mathbb{R}, U$ Umgebung von a, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n \ge N : x_n \in U$. (1P)

(2) a ist Häufungspunkt von $(x_n) \Leftrightarrow$ In jeder Umgebung U von a liegen unendlich viele Punkte der Folge (x_n). (1P)

4) Offene Mengen.(2P je Teilaufgabe)

Sei I eine beliebige Indexmenge und $U_i \subset \mathbb{R}$ offen für jedes $i \in I$. Beweisen Sie:

(i) $\bigcup_{i \in I} U_i$ ist offen in $\mathbb{R}$.

(ii) $\bigcap_{i \in I} U_i$ ist nicht notwendigerweise offen in $\mathbb{R}$.

5) Das Hilbert-Hotel (1P je Teilaufgabe)

Im kleinen Städtchen Hausdorff steht in der Weierstraße das Hotel Hilbert. Es besitzt abzählbar unendlich viele Einzelzimmer. Spät abends steht plötzlich ein Gast in der Eingangshalle und möchte noch ein Zimmer haben. „Wir sind ausgebucht“, erklärt der Portier, um nach kurzem Zögern anzumerken, „... aber wir bekommen Sie auch noch unter !“- „Wie geht das denn ?“, fragt der sichtlich irritierte Gast.

a) Treten Sie an die Stelle des Portiers und erklären Sie es dem Gast. Gehen Sie dabei davon aus, daß alle Gäste bereitwillig kooperieren.

Kurze Zeit später ist die Hotelhalle plötzlich voller Mathematiker, die alle an einer Tagung teilnehmen, aber vergessen haben, sich im voraus ein Zimmer zu reservieren. „Wie viele sind Sie denn ?“, will der Portier wissen. „Wir sind abzählbar unendlich viele“, schallt es ihm entgegen.

b) Der Portier denkt kurz nach, dann hat er die Lösung. Sie auch ?

c) Es kommt bald zu weiteren Turbulenzen, denn wenig später steht ein Mann in der Halle: „Guten Abend, ich bin von Cantor-Reisen und stehe draussen mit ein paar Bussen, genauer gesagt, mit abzählbar unendlich vielen Bussen mit jeweils abzählbar unendlich vielen Gästen. Haben Sie vielleicht noch ein paar Betten für uns ?“- „Das geht ja noch“, meint der Portier. Was meinen Sie ?

d) Im Rahmen der Mathematiker-Tagung werden so viele Teilnehmer erwartet, daß die Organisatoren bereits alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 als Nummern vergeben haben. Die Gäste mit diesen Nummern sollen alle im Hotel Hilbert untergebracht werden. Der arme Portier versucht verzweifelt, die Schlüssel zu vergeben. Warum ?

Abgabe am 25.11.2008 im Tutorium.