Übungsblatt 6 25.11.2008

Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Wintersemester 2008/09

Prof. Dr. B. Schweizer Dr. M. Lenzinger

1) Konvergenzkriterien für Reihen. (1P je Teilaufgabe)

Beweisen Sie für die folgenden Reihen jeweils Konvergenz bzw. Nicht-Konvergenz:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} k!q^k$ für $0 < q < 1$, b) $\sum_{k=0}^{\infty} k^3 q^k$ für $0 < q < 1$,

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k$ (Tipp: Blatt 5, Aufgabe 2),

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$, e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$.

2) Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen. (4P)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nicht-negativer reeller Zahlen. Beweisen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \;\Rightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ konvergiert.}$$

Anleitung: Untersuchen Sie für $s_k := \sum_{n=0}^{k} (-1)^n a_n$ die beiden Teilfolgen $(s_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(s_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie und Beschränktheit.

3) Fall eines Balls. (4P)

Ein Ball fällt aus der Höhe $H = 1m$ auf einen ebenen Untergrund. Bei jedem Sprung erreicht der Ball 75% der zuletzt erreichten Höhe. Wie gross ist der bis zum Stillstand zurückgelegte Weg ?

4) Konvergenz und absolute Konvergenz von Reihen. (2P je Teilaufgabe)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ ist konvergent.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist *absolut* konvergent $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ ist konvergent.

Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass $|a_n| < 1$ für $n > N$ hinreichend groß und schätzen Sie dann die Partialsummen der quadratischen Reihe durch die Partialsummen von $\sum |a_n|$ ab.

Abgabe am 02.12.2008 im Tutorium.