

Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Wintersemester 2008/09

Prof. Dr. B. Schweizer

Dr. M. Lenzinger

1) Stetigkeit. (1P je Teilaufgabe)

Untersuchen Sie folgende Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ auf Stetigkeit in ihrem Definitionsbereich D .

(a) Sei $D = \mathbb{Q}$ und

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x < \sqrt{2}, \\ 1, & \text{falls } x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

(b) Sei $D = \mathbb{R}$ und

$$f(x) := \begin{cases} e^{-2x}, & \text{falls } x > 0, \\ 1, & \text{falls } x \leq 0. \end{cases}$$

(c) Sei $D = \mathbb{R}$ und

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x \leq 0. \end{cases}$$

2) Die Funktionen max und min. (je 2P)

Seien $f, g : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass dann die Funktionen

$$\Phi(x) := \max(f(x), g(x)) \quad \text{und} \quad \Psi(x) := \min(f(x), g(x)), \quad x \in D,$$

ebenfalls stetig auf D sind.

Tipp: Übungsblatt 4, Aufgabe 2.

3) Temperatur auf dem Äquator. (4P)

Die Temperatur auf dem Äquator werde beschrieben durch die stetige Funktion $T : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $T(0) = T(2\pi)$. Zeigen Sie: Es gibt zwei verschiedene Punkte x_1 und x_2 auf dem Äquator, d.h. $x_1, x_2 \in (0, 2\pi)$, die dieselbe Temperatur haben.

4) Zwischenwertsatz mit Intervallschachtelung. (4P)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Zeigen Sie: Es gibt ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = 0$.

Anleitung: Definiere induktiv eine Folge $[a_n, b_n] \subset [a, b]$ von Intervallen durch $[a_0, b_0] := [a, b]$ und

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] := \begin{cases} [a_n, m] & \text{falls } f(m) \geq 0, \\ [m, b_n] & \text{falls } f(m) < 0, \end{cases}$$

wobei $m := \frac{a_n + b_n}{2}$ (Intervall-Halbierungsmethode). Zeige dann, dass es ein $x_0 \in [a, b]$ gibt mit $a_n \rightarrow x_0$ und $b_n \rightarrow x_0$ für $n \rightarrow \infty$ sowie $f(x_0) = 0$.

Abgabe am 09.12.2008 im Tutorium.