Übungsblatt 8 09.12.2008

Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Wintersemester 2008/09

Prof. Dr. B. Schweizer Dr. M. Lenzinger

1) Stetigkeit auf ganz $\mathbb{R}$.

Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelte $f(0) = 1$ sowie

$$f(x+y) \leq f(x)f(y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

(a) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, welche diese Eigenschaften erfüllt. (1P)

(b) Zeigen Sie: Ist f im Nullpunkt stetig, so ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. (3P)

2) Zwischenwertsatz und Lösen von Gleichungen. (2P je Teilaufgabe)

(a) Sei $[a, b]$ ein Intervall und $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen mit

$$f(a) > g(a) \quad \text{und} \quad f(b) < g(b).$$

Zeigen Sie, dass es ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = g(x_0)$ gibt.

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\frac{1}{1+x^2} = \sqrt{x}$$

eine Lösung $x_0 > 0$ besitzt. Skizzieren Sie dazu zunächst die Graphen der Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \dfrac{1}{1+x^2}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := \sqrt{x}$ für $x > 0$.

3) Grenzwerte. (1P je Grenzwert)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x \searrow 0} x \ln(x), \quad \lim_{x \searrow 0} x^x, \quad \lim_{x \nearrow 1} (1-x)\ln(1-x^3), \quad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

4) Punktweise und gleichmässige Konvergenz.

Wir betrachten die Folge stetiger Funktionen

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 : f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \begin{cases} -|2nx - 3| + 1 & , \text{falls } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeichnen Sie die Funktionen f_n für kleine und für grosse $n \in \mathbb{N}$, so dass das Konvergenzverhalten sichtbar wird. (1P)

(b) Zeigen Sie: f_n konvergiert punktweise gegen 0, d.h. $f_n(x) \to 0$ für alle $x \in [0,1]$. (2P)

(c) Konvergiert f_n auch gleichmässig gegen 0 ? (1P)

Abgabe am 16.12.2008 im Tutorium.