Übungsblatt 9 16.12.2008

Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Wintersemester 2008/09

Prof. Dr. B. Schweizer Dr. M. Lenzinger

1) Die Ableitung der Wurzelfunktion. (je 2P)

Finden Sie die Ableitung der Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$

(i) unter Ausnutzung der Beziehung $\sqrt{x} = \exp(\frac{1}{2} \log x)$,

(ii) mit Hilfe der Funktion $g : y \mapsto y^2$ und der Kettenregel.

2) Ableitungen. (je 1P)

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, wobei $a \in \mathbb{R}$ eine positive Konstante ist:

(i) $f : x \mapsto x^x$

(ii) $f : x \mapsto (x^x)^x$

(iii) $f : x \mapsto x^{(x^x)}$

(iv) $f : x \mapsto x^{(a^x)}$

(v) $f : x \mapsto a^{(x^x)}$

(vi) $f : x \mapsto \log(\log x), x > 1$.

3) Relative und absolute Maxima.

Für $n \in \mathbb{N}_*$ definieren wir die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n e^{-x}$.

(i) Zeigen Sie: f besitzt genau ein relatives (lokales) Maximum. Es liegt an der Stelle $x_0 = n$. (3P)

(ii) Ist dieses relative Maximum sogar ein absolutes (globales) Maximum ? (1P)

4) Ableitung gerader und ungerader Funktionen. (4P)

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *gerade*, wenn $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und *ungerade*, wenn $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist. Zeigen Sie:

Die Ableitung einer geraden (ungeraden) Funktion ist ungerade (gerade).

5) Ableitung von Produkten. (4P)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $a \in I$. Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

(i) f ist in a differenzierbar und $f(a) = 0$.

(ii) g ist in a stetig.

Zeigen Sie, dass das Produkt $f \cdot g : I \to \mathbb{R}$ im Punkt a differenzierbar ist mit $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a)$.

6) Das Fermatsche Prinzip. (4P)

Seien $A = (0, -a)$, $a > 0$, ein Punkt in der unteren Halbebene, $B = (d, b)$, $b, d > 0$, ein Punkt in der oberen Halbebene und $P = (x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, ein Punkt auf der reellen Achse. Unter der Annahme, dass man sich in der unteren Halbebene mit der Geschwindigkeit $v_1 > 0$ und in der oberen Halbebene mit der Geschwindigkeit $v_2 > 0$ bewegen kann, bestimme man den Weg, auf dem man in der kürzesten Zeit von A nach B gelangt.

Man verwende dazu, dass der schnellste Weg zwischen zwei Punkten in ein und derselben Halbebene eine Gerade ist und leite eine Beziehung zwischen den Geschwindigkeiten v_1, v_2 sowie den Winkeln φ_1, φ_2 zwischen der Senkrechten in P und den Strahlen PA bzw. PB her (*Brechungsgesetz*).

Abgabe am 06.01.2009 im Tutorium.

Frohe Weihnachten und einen guten Start ins neue Jahr !