

Übungen zur Vorlesung
Analysis I

Wintersemester 2008/09

Prof. Dr. B. Schweizer

Dr. M. Lenzinger

1) Stetigkeit und Differenzierbarkeit. (je 2P)Seien $f, g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) \cdot g(x) = x \forall x \in (-1, 1)$. Zeigen Sie:

- (i) Sind f und g differenzierbar, so gilt: $f(0) = 0 \Rightarrow g(0) \neq 0$.
- (ii) Ohne die Differenzierbarkeits-Voraussetzung ist der Schluss in (i) falsch.

2) Differenzierbarkeit zusammengesetzter Funktionen. (je 2P)Zeigen Sie, dass die Funktionen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar sind und berechnen Sie die Ableitung:

$$g : x \mapsto \begin{cases} x^2 \cos(\frac{1}{x}) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} , \quad h : x \mapsto \begin{cases} x^2 \exp(-\frac{1}{x^2}) & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases} .$$

3) Rechenregeln für höhere Ableitungen. (je 2P)(a) Seien $D \subset \mathbb{R}$ und $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ zwei in D n -mal differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion nach n die *Leibnizsche Formel*

$$\frac{d^n}{dx^n}(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

Hierbei bedeutet $f^{(m)}$ die m -te Ableitung von f , d.h. $f^{(m)}(x) = \frac{d^m}{dx^m} f(x)$, $m \in \mathbb{N}$.(b) Berechnen Sie die hundertste Ableitung der Funktion $f(x) = x^2 \sin 2x$.

4) Die Regel von l'Hôpital. (je 2P)

(a) Zeigen Sie den *verallgemeinerten Mittelwertsatz*: Seien f, g in $[a, b] \subset \mathbb{R}$ stetig, auf (a, b) differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

(b) Die Funktionen f und g seien auf $(a, b) \subset \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $g'(x) \neq 0$ in (a, b) . Es gelte $\lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{x \searrow a} g(x) = 0$. Zeigen Sie mit Hilfe von Teil (a):

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der Limes auf der rechten Seite existiert.

Abgabe am 13.01.2009 im Tutorium.

Hinweis der Fachschaft.

APRES π PARTY
Der Fachschaft Mathematik

Mittwoch, 14.01.2009
Kaktusfarm
Einlass: 20.00 Uhr

Softdrinks / Bier: 1 €
Longdrinks / Bowle: 2 €

VVK: 3 €
(Mathtower,
9. Etage,
FS Mathe)

AK: 4 €