Übungsblatt 11 13.01.2009

Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Wintersemester 2008/09

Prof. Dr. B. Schweizer Dr. M. Lenzinger

1) Konvexität. (je 2P)

Die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) = x \ln x^2 - \ln x$.

(a) Skizzieren Sie die Funktion f, so dass ihr Verlauf qualitativ sichtbar wird.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion f konvex ist.

2) Charakterisierung konvexer Funktionen. (4P)

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und f' auf (a, b) stetig, $x_0 \in (a, b)$.

Zeigen Sie: Falls f konvex ist, so gilt die Ungleichung

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ für alle } x \in (a, b).$$

Betrachten Sie dazu die Funktion $g(t) := f(tx + (1 - t)x_0)$ für $t \in [0, 1]$.

3) Taylorreihen. (je 1P)

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ die Taylorreihe von f in $x_0 \in \mathbb{R}$:

(i) $f : x \mapsto \sin x,\ D = \mathbb{R},\ x_0 = 0,$

(ii) $f : x \mapsto \sin x,\ D = \mathbb{R},\ x_0 = \frac{\pi}{2},$

(iii) $f : x \mapsto \frac{1}{1+x},\ D = (-1, \infty),\ x_0 = 0,$

(iv) $f : x \mapsto x^\alpha,\ D = (0, \infty),\ x_0 > 0$ mit beliebigem $\alpha \in \mathbb{R}$.

4) Berechnung eines Integrals mittels Ober- und Untersummen. (4P)

Berechnen Sie das Integral $\int_0^a x^2 dx$ für beliebiges $a > 0$.

Verwenden Sie dazu die äquidistante Zerlegung $x_k = kh$, $k = 0, ..., n$, des Intervalls $[0, a]$ der Feinheit $h = \frac{a}{n}$ mit den zugehörigen Unter- bzw. Obersummen

$$s_n = h \sum_{k=0}^{n-1} (kh)^2 \ (\textit{Untersumme}) \quad \text{bzw.} \qquad S_n = h \sum_{k=1}^{n} (kh)^2 \ (\textit{Obersumme}).$$

Abgabe am 20.01.2009 im Tutorium.