Übungsblatt 12 20.01.2009

Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Wintersemester 2008/09

Prof. Dr. B. Schweizer Dr. M. Lenzinger

1) Anwendung der Regel von l'Hôpital. (4P)

Sei $F_a(x) = (2 - a^{1/x})^x$ für $x > 0$ mit dem Parameter $0 < a < 1$. Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to\infty} F_a(x)$.

Verwenden Sie dazu die Substitution $t := 1/x$ und die Funktion $G_a(t) = \ln F_a(1/t)$.

2) Flächeninhalt. (4P)

Berechnen Sie den Wert des Riemann-Integrals

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

und damit den Flächeninhalt des Halbkreises in der Ebene.
Anleitung: Verwenden Sie die Substitution $x = \sin t =: \varphi(t)$ und die Identität $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$ (Additionstheorem).

3) Berechnung von Integralen. (je 2P)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\, dx$ *(Partialbruchzerlegung)*,

(b) $\displaystyle\int \frac{e^{3x} + 3}{e^x + 1}\, dx$ *(Substitution)*,

(c) $\displaystyle\int_1^e x^{10} \log x\, dx$ *(Partielle Integration)*.

4) Integral als Funktion der oberen Grenze. (je 2P)

Sei f über $I = [a, b]$ integrierbar, $a \leq c \leq b$, und

$$F(x) := \int_c^x f(t)\,dt.$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(i) Die Funktion F ist in I *Lipschitzstetig*, d.h. es gibt ein $K \in \mathbb{R}$, so dass

$$|F(x) - F(x')| \leq K\,|x - x'| \quad \text{für alle} \quad x, x' \in I.$$

(ii) Ist $f \geq 0$ in I, so ist F monoton wachsend.

Abgabe am 27.01.2009 im Tutorium.