TU Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. R. Brück
Dipl.-Math. I. Bednarek

Dortmund, 17. November 2008

Analysis I (Lehramt)

10. Übungsblatt, Wintersemester 2008/09

Aufgabe 43 *Präsenzaufgabe für Dienstag, 18.11.2008*

Geben Sie zwei Folgen (a_n) und (b_n) an mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ und $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ b) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ c) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$

Aufgabe 44 *Präsenzaufgabe für Dienstag, 18.11.2008*

Es sei (a_n) eine Folge. Welche der folgenden Bedingungen sind hinreichend dafür, dass (a_n) eine Nullfolge ist?

a) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| + |a_{n+1}| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

b) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n + a_{n+1}| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

c) Es gibt ein ε_0, so dass es zu jedem ε mit $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $|a_n| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$.

d) Es gibt ein ε_0 und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $\varepsilon > \varepsilon_0$ und alle $n \geq n_0$ gilt $|a_n| < \varepsilon$.

e) Es gibt ein ε_0 und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle ε mit $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ und alle $n \geq n_0$ gilt $|a_n| < \varepsilon$.

Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 45 *Präsenzaufgabe für Dienstag, 18.11.2008*

Untersuchen Sie auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

a) $a_n := \frac{3n^2 - 2n + 2}{7n^2 + 4}$ b) $b_n = \frac{2n^4 + (-1)^n n^2}{n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1}$

Aufgabe 46 *Hausaufgabe bis Donnerstag, 20.11.2008 (2 Punkte)*

Es seien (a_n) und (b_n) zwei Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Zeigen oder widerlegen Sie:

a) Ist $0 < a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $a < b$.

b) Ist $0 < a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $a \leq b$.

Aufgabe 47 *Hausaufgabe bis Donnerstag, 20.11.2008 (2 Punkte)*

Untersuchen Sie auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

a) $a_n = \dfrac{3n^2 + n + 1}{5n^2 + 4n + (-1)^n}$

b) $b_n = (-1)^n \dfrac{5n^3 + 7n^2}{3n^5 + 1}$

c) $c_n := \dfrac{n^2 + 1}{n + 3}$

d) $d_n = \dfrac{2^n + n^2}{3^n + n^3}$