TU Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. R. Brück
Dipl.-Math. I. Bednarek

Dortmund, 19. November 2008

Analysis I (Lehramt)

11. Übungsblatt, Wintersemester 2008/09

Aufgabe 48 *Präsenzaufgabe für Donnerstag, 20.11.2008*

Untersuchen Sie auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

a) $a_n = \dfrac{n^4 + 2^n + 3}{2^{n+1} - 3n^4}$ b) $c_n := \sqrt[n]{3^n + 4^n}$

Aufgabe 49 *Präsenzaufgabe für Donnerstag, 20.11.2008*

Es sei $a_n := \dfrac{(-1)^n + n}{2 + (-1)^n n}$. Untersuchen Sie, ob die Folge (a_n) beschränkt ist.

Aufgabe 50 *Präsenzaufgabe für Donnerstag, 20.11.2008*

Es sei $0 < a_0 < 1$. Die Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch $a_{n+1} := \dfrac{2a_n + 1}{3}$.

a) Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) beschränkt ist.

b) Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) monoton wachsend ist.

c) Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) konvergent ist und berechnen Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe 51 *Hausaufgabe bis Dienstag, 25.11.2008 (2 Punkte)*

Untersuchen Sie auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

a) $a_n = \sqrt{n^4 + n^2 + 1} - n^2 - 1$ b) $b_n = \dfrac{5n^3 + 7^n}{3n^5 + n!}$

c) $c_n := \sqrt{1 + \dfrac{(-1)^n}{n^2}}$ d) $d_n = \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n$

Hinweis zu d): Verwenden Sie die Bernoullische Ungleichung.

Aufgabe 52 *Hausaufgabe bis Dienstag, 25.11.2008 (1 Punkt)*

Berechnen Sie mit einem Computeralgebrasystem die ersten 100 Werte der Folge (a_n) mit $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Stellen Sie eine Vermutung auf, ob die Folge konvergiert oder nicht.
Hinweis: Bei Maple können Sie den Befehl "seq" verwenden.

Aufgabe 53 *Hausaufgabe bis Dienstag, 25.11.2008 (2 Punkte)*

Es sei (a_n) eine beschränkte Folge und (b_n) eine konvergente Folge. Zeigen oder widerlegen Sie:

a) Die Folge $(a_n + b_n)$ ist konvergent.

b) Die Folge $(a_n + b_n)$ ist beschränkt.

c) Die Folge $(a_n \cdot b_n)$ ist konvergent.

.

Aufgabe 54 *Hausaufgabe bis Dienstag, 25.11.2008 (2 Punkte)*

Es seien (a_n), (b_n) und (c_n) definiert durch:

$$a_n := \sqrt{n + 1000000} - \sqrt{n},\ b_n := \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n},\ c_n := \sqrt{n + \frac{n}{1000000}} - \sqrt{n}$$

a) Berechnen Sie mit einem Computeralgebrasystem die ersten 100 Werte der Folgen (a_n), (b_n) und (c_n). Stellen Sie eine Vermutung auf, ob die Folge konvergiert oder nicht.

b) Zeigen Sie: Für $n \leq 10^{12}$ gilt $a_n \geq b_n \geq c_n$.

c) Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Grenzwerte.