

Analysis I (Lehramt)

13. Übungsblatt, Wintersemester 2008/09

Aufgabe 60 *Präsenzaufgabe für Donnerstag, 27.11.2008*

Geben Sie eine Intervallschachtelung $([a_n, b_n])$ für die Zahl $\sqrt{2}$ an, wobei a_n und b_n für alle $n \in \mathbb{N}$ rationale Zahlen sind.

Aufgabe 61 *Hausaufgabe bis Donnerstag, 4.12.2008 (2 Punkte)*

Die Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch $a_0 := \frac{1}{2}$ und $a_{n+1} := a_n^2 + \frac{3}{16}$.

- Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) beschränkt ist.
- Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) monoton fallend ist.
- Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) konvergent ist und berechnen Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe 62 *Zusatzaufgabe bis Dienstag, 2.12.2008 (2 Bonuspunkte)*

- Es sei $A \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere, beschränkte Menge und $S \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- S ist Supremum von A
- Für alle $x \in A$ gilt $x \leq S$ und es gibt eine Folge (x_n) in A (d.h. $x_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$) mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = S$.

- Bestimmen Sie das Supremum der Menge $A := \left\{ \frac{(n+1)^{2n+1}}{(n+2)n^{2n}} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

Aufgabe 63 *Zusatzaufgabe bis Dienstag, 2.12.2008 (2 Bonuspunkte)*

Gegeben sei ein Kreis mit Radius 1. Diesem werde ein Quadrat, ein regelmässiges Achteck, \dots , ein regelmässiges 2^n -Eck ($n \in \mathbb{N}, n > 1$) einbeschrieben. Ebenso werde dem Kreis ein Quadrat, ein regelmässiges Achteck, \dots , ein regelmässiges 2^n -Eck umbeschrieben.

- Fertigen Sie eine Skizze an.
- Berechnen Sie mit elementargeometrischen Mitteln den Flächeninhalt A_n des einbeschriebenen 2^n -Ecks und den Flächeninhalt B_n des umbeschriebenen 2^n -Ecks.
- Begründen Sie, dass $([A_n, B_n])$ eine Intervallschachtelung definiert.
- Geben Sie eine sinnvolle Näherung für $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ an.