

Analysis I (Lehramt)

18. Übungsblatt, Wintersemester 2008/09

Aufgabe 82 Präsenzaufgabe für Dienstag, 16.12.2008

Es sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{\sin(2x)}{x^2 - x}$.

- Zeigen Sie, dass f stetig ist.
- Ist f in den Punkten 0 und 1 stetig fortsetzbar?

Aufgabe 83 Präsenzaufgabe für Dienstag, 16.12.2008

Geben Sie eine unbeschränkte, stetige Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ an, für die $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.

Aufgabe 84 Hausaufgabe bis Donnerstag, 18.12.2008 (2 Punkte)

Überprüfen Sie die Existenz folgender Grenzwerte und berechnen Sie diese gegebenenfalls:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x^2} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2}$$

Aufgabe 85 Hausaufgabe bis Donnerstag, 18.12.2008 (2 Punkte)

Es sei H die Heavisidefunktion und es seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f(x) := (H(x-1) + 1)(x^3 + 1) \quad g(x) := (H(x-1) + 1)(x^3 - 1)$$

- Zeigen Sie, dass f und g monoton wachsend sind.
- Bestimmen Sie jeweils den rechts- und linksseitigen Grenzwert in $x_0 = 1$.
- Sind f, g stetig in $x_0 = 1$?

Aufgabe 87 Hausaufgabe bis Donnerstag, 18.12.2008 (2 Punkte)

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es ein $L > 0$ gibt mit

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

- Zeigen Sie, dass jede Lipschitz-stetige Funktion stetig ist.
- Zeigen Sie, dass die Kosinusfunktion Lipschitz-stetig ist.
- Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \sqrt{|x|}$ stetig, aber nicht Lipschitz-stetig ist.