TU Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. R. Brück
Dipl.-Math. I. Bednarek

Dortmund, 17. Dezember 2008

Analysis I (Lehramt)

19. Übungsblatt, Wintersemester 2008/09

Aufgabe 88 *Präsenzaufgabe für Donnerstag, 18.12.2008*

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und die Folge (a_n) definiert durch $a_0 := 0$ und $a_{n+1} := f(a_n)$. Zeigen oder widerlegen Sie: Ist (a_n) konvergent, so ist $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ein Fixpunkt von f, das heißt $f(a) = a$.

Aufgabe 89 *Präsenzaufgabe für Donnerstag, 18.12.2008*

Es sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige, nicht konstante Funktion. Zeigen oder widerlegen Sie: Das Bild $f([a, b])$ ist ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall.

Aufgabe 86 *Hausaufgabe bis Dienstag, 6.1.2009 (2 Punkte)*

Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen. Zeigen oder widerlegen Sie:

a) Ist $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ und g beschränkt, so ist $\lim\limits_{x\to\infty} (f \cdot g)(x) = 0$.

b) Ist $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ und g beschränkt, so ist $(f \cdot g)$ beschränkt.

Aufgabe 90 *Hausaufgabe bis Dienstag, 6.1.2009 (2 Punkte)*

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2} & \text{für } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 0 \end{cases}$. Untersuchen Sie die Funktion f auf Stetigkeit im Nullpunkt.

Aufgabe 91 *Hausaufgabe bis Dienstag, 6.1.2009 (2 Punkte)*

a) Es sei $f :\ [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$. Zeigen Sie, dass ein $\xi \in [0, 1]$ existiert mit $f\left(\xi + \dfrac{1}{2}\right) = f(\xi) + \dfrac{1}{2}$.

b) Eine Studentin trinkt auf einer Sylvesterparty zwischen 20 Uhr am Sylvesterabend und 4 Uhr am darauffolgenden Neujahrsmorgen insgesamt zwei Liter Sekt. Zeigen Sie, dass es ein Zeitintervall von einer Stunde gibt, in der die Studentin genau $0,25$ Liter Sekt trinkt.

Aufgabe 92 *Hausaufgabe bis Dienstag, 6.1.2009 (1 Punkt)*

Bestimmen Sie das Minimum und das Maximum der stetigen Funktion $f : [-1, 4] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := e^{1+|x-1|}$. Skizzieren Sie den Graphen von f.

Aufgabe 93 *Hausaufgabe bis Dienstag, 6.1.2009 (2 Punkte)*

Gegeben sei das Polynom $P(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 1$. Zeigen Sie, dass P in $[0, 1]$ eine Nullstelle besitzt und berechnen Sie mit Hilfe des Intervallhalbierungsverfahrens eine Näherung für eine Nullstelle, bei der der Fehler kleiner als $\frac{1}{10}$ ist.

Aufgabe 94 *Hausaufgabe bis Dienstag, 6.1.2009 (2 Punkte)*

a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{Q}$. Zeigen oder widerlegen Sie: f ist konstant.

b) Es sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ stetig mit $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Zeigen oder widerlegen Sie: Es gibt ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit $f(\xi) = 0$.

Aufgabe 95 *Zusatzaufgabe ohne Abgabe ("Analysis und Lineare Algebra")*

Es sei $C(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,:\, f \text{ ist stetig }\}$. Zeigen Sie, dass $C(\mathbb{R})$ mit den Verküpfungen $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ und $(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$ für $f, g \in C(\mathbb{R}),\ \lambda \in \mathbb{R}$, ein reeller Vektorraum ist. Bestimmen Sie dessen Dimension.

Aufgabe 96 *Zusatzaufgabe ohne Abgabe*

An einem winterlichen Fenster wächst eine Eisblumme nach folgendem Bildungsgesetz: Die Ausgangsfigur T_0 ist ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge 1. T_{n+1} entsteht aus T_n, indem auf dem mittleren Drittel jeder Kante von T_n ein gleichseitiges Dreieck aufgesetzt wird. Berechnen Sie den Umfang U_n und den Flächeninhalt F_n von T_n und zeigen Sie: $\lim\limits_{n \to \infty} U_n = \infty$ und $\lim\limits_{n \to \infty} F_n < \infty$.

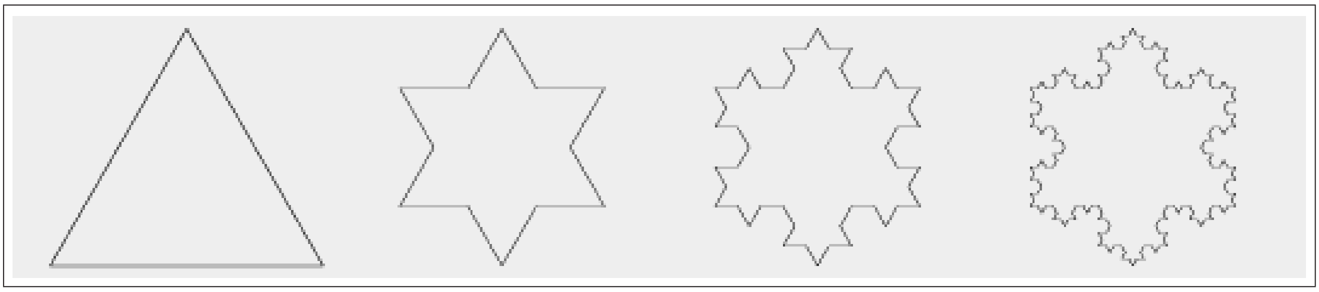

Abbildung 1: Die Eisblume

Das Team der Analysis I wünscht Ihnen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins Jahr 2009!