TU Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. R. Brück
Dipl.-Math. I. Bednarek

Dortmund, 12. Januar 2009

# Analysis I (Lehramt)

22. Übungsblatt, Wintersemester 2008/09

**Aufgabe 106** *Präsenzaufgabe für Dienstag, 13.1.2009*

*Beweis der Kettenregel?* Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Nach der *Kettenregel* ist dann auch die Funktion $f \circ g$ differenzierbar. Läßt sich das durch die folgende Argumentation beweisen?
"Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$ fest. Dann gilt wegen der Differenzierbarkeit von $f$ und $g$ und der Stetigkeit von $g$:

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \to f'(g(x_0))f'(x_0) \ (x \to x_0)$$

Dies liefert die Behauptung."

**Aufgabe 107** *Präsenzaufgabe für Dienstag, 13.1.2009*

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen in allen Punkten ihres maximalen Definitionsbereiches auf Differenzierbarkeit und bestimmen Sie ggf. die Ableitung:

a) $f(x) := \dfrac{x^2}{\cos x}$ b) $f(x) := \dfrac{x^2}{x^3 + 1}$ c) $f(x) := \sin(e^x)$

**Aufgabe 108** *Hausaufgabe bis Donnerstag, 15.1. 2009 (1 Punkt)*

Es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$. Zeigen Sie die Summenregel (Satz 5.1.5a): $f + g$ ist in $x_0$ differenzierbar mit $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

**Aufgabe 109** *Hausaufgabe bis Donnerstag, 15.1. 2009 (3 Punkte)*

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen in allen Punkten ihres maximalen Definitionsbereiches auf Differenzierbarkeit und bestimmen Sie ggf. die Ableitung:

a) $f(x) := \log(2 + \cos x)$ b) $f(x) := e^x \ \sin x$ c) $f(x) := \cos \log x$

d) $f(x) := x^x$ e) $f(x) := e^{e^x}$ f) $f(x) := \dfrac{e^{x^2} - 1}{1 + |x|}$

g) $f(x) := \dfrac{1 + \sin x}{5 + x^3 - \cos x}$ h) $f(x) := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ i) $f(x) := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

j) $f(x) := |\cos x|$ k) $f(x) := |\sin^2 x|$

**Aufgabe 110** *Hausaufgabe bis Donnerstag, 15.1. 2009 (2 Punkte)*

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$.

a) Zeigen Sie, dass $f$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung.

b) Zeigen Sie, dass $f$ in 0 differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung $f'(0)$.

c) Untersuchen Sie die Funktion $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit.

**Aufgabe 111** *Zusatzaufgabe ohne Abgabe*

*Analysis und Lineare Algebra:* Es sei $C^1(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ ist stetig differenzierbar}\}$ und es sei $C(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ ist stetig}\}$. Dann sind $C^1(\mathbb{R})$ und $C(\mathbb{R})$ mit den üblichen Verknüpfungen $\mathbb{R}$-Vektorräume.

a) Zeigen Sie, dass durch die Differentiation $D : C^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ mit $D(f) := f'$ eine lineare Abbildung definiert wird.

b) Ist die Abbildung $D$ injektiv?