Prof. Dr. Norbert Steinmetz

Fakultät für Mathematik
Technische Universität Dortmund

1. Übungsblatt zu Analysis III
WS 2008/09, 13.10.2008

Aufgabe 1 Überprüfen Sie, ob folgende Mengen Nullmengen sind (Begründung nicht vergessen!).

a) $\{(1, x) \ : \ -1 \le x \le 1\} \subset \mathbb{R}^2$

b) $\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ ||x||_\infty \le 1\} \subset \mathbb{R}^n$

c) $\mathbb{Q} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$.

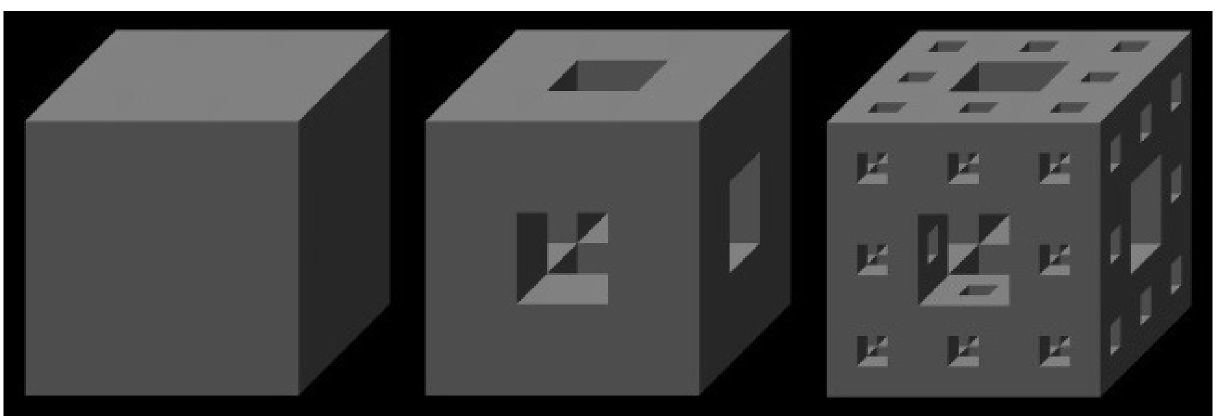
Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass **fast alle** $x \in \mathbb{R}^n$ nur irrationale Koordinaten haben, d.h. daß die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n : \text{wenigstens ein } x_\nu \text{ ist rational}\}$ eine Nullmenge ist.

Aufgabe 3 Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Zeigen Sie, dass der Graph $G = \{(x, f(x)) : x \in I\} \subset \mathbb{R}^2$ eine Nullmenge ist.

Aufgabe 4 Es sei $E_0 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_\infty \le 1\}$ der Einheitswürfel. Die Menge E_1 entsteht aus E_0, indem E_0 in 27 gleich große Würfel geteilt wird und die 7 *mittleren* (offenen) Würfel entfernt werden. Diese Prozedur wird rekursiv für jeden Teilwürfel wiederholt.

a) Berechnen Sie das 3-dimensionale Volumen von E_n.

b) Zeigen Sie, dass $E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} E_n$ eine nichtleere, kompakte, Nullmenge in $\mathbb{R}^3$ ist.



Aufgabe 5 Zeigen Sie: $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist genau dann eine Treppenfunktion, wenn Intervalle J_μ und Konstanten a_μ existieren mit $\Phi(x) = \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu \chi_\mu(x)$ fast überall. Dabei ist $\chi_\mu(x) = 1$ in J_μ und $\chi_\mu(x) = 0$ sonst. Beachten Sie, dass im Gegensatz zur Definition einer Treppenfunktion $J_\nu \cap J_\mu = \emptyset$ für $\mu \ne \nu$ nicht gefordert wurde.

Abgabe: In den Übungen am 20. Oktober 2008.
Informationen zur Vorlesung finden Sie auch unter:
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ws0809`