

7. Übungsblatt zu Analysis III

WS 2008/09, 24.11.2008

Aufgabe 27 Es sei $f(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(1 + t \sin^2 \varphi) d\varphi$.

- a) Berechnen Sie $f'(t)$. Warum darf man unter dem Integral differenzieren?
- b) Finden Sie eine explizite (also *integralfreie*) Darstellung von f , indem Sie $tf'(t)$ untersuchen.

Aufgabe 28 Berechnen Sie eine explizite Darstellung der Laplacetransformierten von:

- a) $f(t) = t^n$.
- b) $f(t) = [t]$. Dabei bezeichne $[\cdot]$ die Gaussklammer.
- c) $f(t) = e^{-t^2}$.

Aufgabe 29 Für $\alpha > 0$ sei $f(t) = \frac{1 - \cos(\alpha t)}{t}$. Bestimmen Sie die Laplacetransformation F von f , indem Sie F zunächst nach α differenzieren. (Begründungen nicht vergessen!)

Aufgabe 30 Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(t) = O(e^{-t})$ für $t \rightarrow \infty$ und $f(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k + o(t^n)$ für $t \rightarrow 0$. Zeigen Sie, dass

$$F(x) = \int_0^{\infty} f(t)t^{x-1} dt$$

der Darstellung

$$F(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{x+k} + F_n(x) \text{ mit } F_n \in C^\infty((-n, \infty))$$

genügt.