Prof. Dr. Norbert Steinmetz

Fakultät für Mathematik
Technische Universität Dortmund

8. Übungsblatt zu Analysis III
WS 2008/09, 1.12.2008

Aufgabe 31 Es sei $C := \left(\int_{\|x\|\le 1} \exp\left(-\frac{1}{1-\|x\|^2}\right) dx\right)^{-1}$ und

$$K(x) = \begin{cases} C\exp(-\frac{1}{1-\|x\|^2}) & , \|x\| \le 1 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass K ein Glättungskern im $\mathbb{R}^n$ mit kompaktem Träger ist.

Aufgabe 32 Es seien $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. Beweisen Sie folgende Regeln für die Fouriertransformation.

a) $\widehat{f+g}(\mathbf{x}) = \widehat{f}(\mathbf{x}) + \widehat{g}(\mathbf{x})$ und $\widehat{\alpha f}(\mathbf{x}) = \alpha\widehat{f}(\mathbf{x})$.

b) $f(\mathbf{t}) = \prod_{\nu=1}^{n} \Phi_\nu(t_\nu) \Rightarrow \widehat{f}(\mathbf{x}) = \prod_{\nu=1}^{n} \widehat{\Phi_\nu}(x_\nu)$

c) $g(\mathbf{t}) = e^{2\pi i\cdot a\mathbf{t}} f(\mathbf{t}) \Rightarrow \widehat{g}(\mathbf{x}) = \widehat{f}(\mathbf{x})e^{-2\pi i a\cdot\mathbf{x}}$

d) $g(\mathbf{t}) = \overline{f(\mathbf{t})} \Rightarrow \widehat{g}(\mathbf{x}) = \overline{\widehat{f}(-\mathbf{x})}$

Aufgabe 33 Bestimmen Sie eine explizite Darstellung der Fouriertransformation von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit

a) $f(t) = 1_{[a,b]}(t)$ mit $-\infty < a < b < \infty$,

b) $f(t) = \begin{cases} 1-t^2 & |t| \le 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$ und

c) $f(t) = \begin{cases} 1-|t| & |t| \le 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}.$

Aufgabe 34 Es sei $f(x,y) = \dfrac{\arctan(xy)}{y(1+y^2)}$.

a) Zeigen Sie, dass $F(x) = \int_0^\infty f(x,y)dy$ für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert und eine stetige Funktion definiert.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion F auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung.

c) Bestimmen Sie damit eine explizite Darstellung der Funktion F.

Abgabe: In den Übungen am 8. Dezember 2008.
Informationen zur Vorlesung finden Sie auch unter:
`www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ws0809`