

9. Übungsblatt zu Analysis III
 WS 2008/09, 9.12.2008

Aufgabe 35 Es seien $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$. Zeigen Sie:

- a) $f \star g = g \star f$
- b) $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$
- c) Es existiert kein $E \in L^1(\mathbb{R})$ mit $E \star f = f$. (Hinweis: Angenommen doch. Was gilt dann für $\widehat{E \star E}$?)

Aufgabe 36 (fortgesetzt) Es sei $f \in \mathcal{S}$ und

$$(1) \quad g_R(t) = \begin{cases} \frac{1}{R} \left(1 - \frac{|t|}{R}\right), & |t| < R \\ 0, & |t| \geq R \end{cases}.$$

Zeigen Sie:

- a) Es gilt $\|g_R\|_1 = 1$ und $\|g_R\|_\infty \rightarrow 0$ sowie $\|Rg_R - 1\|_\infty \rightarrow 0$ für $R \rightarrow \infty$.
- b) Es gilt $\widehat{g_R}(x) = \begin{cases} \left(\frac{\sin(\pi Rx)}{\pi Rx}\right)^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$. (Vgl. Aufgabe 33 c))
- c) Weiter gilt $\int_{-\infty}^{\infty} Rg_R(t)e^{2\pi ixt}\widehat{f}(t)dt = (f \star \widehat{Rg_R})(x)$. (Hinweis: Benutzen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(x)f(x)dx$)
- d) Folgern Sie, dass $\|(f \star \widehat{Rg_R}) - f\|_1 \rightarrow 0$ für $R \rightarrow \infty$ gilt.

Aufgabe 37 Für $t \in \mathbb{R}$ sei $f_t(\zeta) = e^{-\pi(\zeta^2 - 4t\zeta + 2t^2)}$.

- a) Zeigen Sie $f_t(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_k(\zeta) \frac{t^k}{k!}$ mit $t, \zeta \in \mathbb{R}$, wobei $e^{\pi\zeta^2} \Psi_k(\zeta)$ ein Polynom vom Grad k ist.
- b) Zeigen Sie $\widehat{f}_t(x) = e^{-\pi(x^2 + 4itx - 2t^2)}$.
- c) Folgern Sie $\widehat{\Psi}_k(x) = (-i)^k \Psi_k(x)$.