

9. Übungsblatt zu Analysis III  
WS 2008/09, 9.12.2008

**Aufgabe 35** Es seien  $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$ . Zeigen Sie:

- a)  $f \star g = g \star f$
- b)  $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$
- c) Es existiert kein  $E \in L^1(\mathbb{R})$  mit  $E \star f = f$ . (Hinweis: Angenommen doch. Was gilt dann für  $\widehat{E \star E}$ ?)

**Aufgabe 36 (fortgesetzt)** Es sei  $f \in \mathcal{S}$  und

$$(1) \quad g_R(t) = \begin{cases} \frac{1}{R} \left(1 - \frac{|t|}{R}\right), & |t| < R \\ 0, & |t| \geq R \end{cases}.$$

Zeigen Sie:

- a) Es gilt  $\|g_R\|_1 = 1$  und  $\|g_R\|_\infty \rightarrow 0$  sowie  $\|Rg_R - 1\|_\infty \rightarrow 0$  für  $R \rightarrow \infty$ .
- b) Es gilt  $\widehat{g_R}(x) = \begin{cases} \left(\frac{\sin(\pi Rx)}{\pi Rx}\right)^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ . (Vgl. Aufgabe 33 c))
- c) Weiter gilt  $\int_{-\infty}^{\infty} Rg_R(t)e^{2\pi ixt}\widehat{f}(t)dt = (f \star \widehat{Rg_R})(x)$ . (Hinweis: Benutzen Sie  $\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(x)f(x)dx$ )
- d) Folgern Sie, dass  $\|(f \star \widehat{Rg_R}) - f\|_1 \rightarrow 0$  für  $R \rightarrow \infty$  gilt.

**Aufgabe 37** Für  $t \in \mathbb{R}$  sei  $f_t(\zeta) = e^{-\pi(\zeta^2 - 4t\zeta + 2t^2)}$ .

- a) Zeigen Sie  $f_t(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_k(\zeta) \frac{t^k}{k!}$  mit  $t, \zeta \in \mathbb{R}$ , wobei  $e^{\pi\zeta^2} \Psi_k(\zeta)$  ein Polynom vom Grad  $k$  ist.
- b) Zeigen Sie  $\widehat{f}_t(x) = e^{-\pi(x^2 + 4itx - 2t^2)}$ .
- c) Folgern Sie  $\widehat{\Psi}_k(x) = (-i)^k \Psi_k(x)$ .

**Abgabe:** In den Übungen am 15. Dezember 2008.

Informationen zur Vorlesung finden Sie auch unter: