

10. Übungsblatt zu Analysis III
 WS 2008/09, 15.12.2008

Aufgabe 35 Es sei $\Psi \in \mathcal{S}$ mit $\|\Psi\|_2 = 1$. Dann gilt (lt. Vorlesung)

$$(1) \quad \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\Psi(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\widehat{\Psi}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{1}{16\pi^2}.$$

Auf \mathcal{S} seien die Abbildungen A, A^* und L definiert durch:

- (i) $L(f) = -\frac{d^2 f}{dx^2} + x^2 f$
- (ii) $A(f) = \frac{df}{dx} + x f$
- (iii) $A^*(f) = -\frac{df}{dx} + x f$

Zeigen Sie, dass für alle $f, g \in \mathcal{S}$ gilt:

- a) $\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2 dx = 4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\widehat{f}(x)|^2 dx$. (Hinweis: Formel von Plancherel und partielle Integration)
- b) Aus (1) folgt $\langle L(f), f \rangle \geq \langle f, f \rangle$. (Hinweis: partielle Integration und Aufgabenteil a))
- c) $\langle A(f), g \rangle = \langle f, A^*(g) \rangle$
- d) $\langle A(f), A(f) \rangle = \langle A(A^*(f)), f \rangle$
- e) $A^*A = L - I$

Aufgabe 36 Es sei $f(t) = \sinh(t)$ für $|t| \leq 1$ und $f(t) = 0$ sonst. Berechnen Sie $\widehat{f}(x)$.

Aufgabe 37 Es sei $R > 0$, $Z = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{R}{2}\right)^2 \right\}$ und $K = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \}$. Berechnen Sie das Volumen von $K \cap Z$.

Aufgabe 38 Für $R > 0$ und $0 \leq \delta \leq \pi$ sei $K(\delta, R)$ der Kugelsektor mit Radius R , der drehsymmetrisch zur z -Achse ist, dessen Spitze im Ursprung ist, und dessen Öffnungswinkel δ ist.

- a) Skizzieren Sie die Projektion von $K(\delta, R)$ auf die y - z -Ebene.
- b) Bestimmen Sie den Schwerpunkt und das Trägheitsmoment (bzgl. z -Achse) von $K(\delta, R)$.