Prof. Dr. Norbert Steinmetz
Fakultät für Mathematik
Technische Universität Dortmund

12. Übungsblatt zu Analysis III
WS 2008/09, 12.1.2009

Aufgabe 42 Lösen Sie die Anfangswertprobleme

(a) $$x'' = e^{2x} + e^x,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 2,$$

und

(b) $$x'' = x + (x')^2,\ x(0) = -3/2,\ x'(0) = 1,$$

und bestimmen Sie jeweils das maximale Existenzintervall der Lösung.

Aufgabe 43 Für das Anfangswertproblem $x' = f(t,x)$, $x(0) = 0$, sei die Standardvoraussetzung in $(a,a) \times (-b,b)$ erfüllt. Zeigen Sie:

(a) Für $f(-t,x) = -f(t,x)$ ist die Lösung eine gerade Funktion;

(b) Für $f(-t,-x) = f(t,x)$ ist die Lösung eine ungerade Funktion;

(b) Für $f(0,0) \neq 0$ besitzt $t \mapsto x(t)$ eine Umkehrfunktion $x \mapsto \tau(x)$ in einem Intervall $-\alpha < x < \alpha$; leiten Sie ein Anfangswertproblem für diese Funktion her (Leibniz lässt grüssen).

Aufgabe 44 Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$x' = t^2 + x^2,\ x(0) = 0.$$

Berechnen Sie ausgehend von $\Phi_0(t) = 0$ die Picarditerierten Φ_k für $1 \leq k \leq 3$. Leiten Sie aus dem Ansatz

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{4k+3}$$

(wie kommt man darauf?) die Rekursionsformel

$$(4n+7)c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} \quad (c_0 = 1/3)$$

her, und beweisen Sie eine möglichst gute Abschätzung der Form

$$0 < c_k \leq AB^k$$

(woraus für den Konvergenzradius $r \geq 1/\sqrt[4]{B}$ folgt. 1. Preis: $r \geq 1.8612097$).

Abgabe: In den Übungen am 19./20.1. 2009
Informationen zur Vorlesung finden Sie auch unter:
`www.mathematik.tu-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ws0809`