

13. Übungsblatt zu Analysis III WS 2008/09, 19.1.2009

Aufgabe 45 Transformieren Sie das System

$$x' = x - (x + y)(x^2 + y^2), \quad y' = y + (x - y)(x^2 + y^2)$$

mittels Polarkoordinaten $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ und lösen Sie das so entstehende System $r' = G(r, \theta)$, $\theta' = H(r, \theta)$ explizit.

Aufgabe 46 Gegeben sei die Riccatische Differentialgleichung

$$(*) \quad x' = f(t) + g(t)x + h(t)x^2 \quad (f, g, h : I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}).$$

Zeigen Sie:

	Sind ϕ_1 und ϕ_2	bzw.	oder ϕ_1, ϕ_2 und ϕ_3	
	verschiedene Lösungen in		$J \subset I$,	so überführt die Transformation
	$y = \frac{x - \phi_1(t)}{x - \phi_2(t)}$	bzw.	$y = \frac{(x - \phi_1(t))(\phi_3(t) - \phi_2(t))}{(x - \phi_2(t))(\phi_3(t) - \phi_1(t))}$	
	die Gleichung	(*)	in die Differentialgleichung	
	$y' = h(t)(\phi_1(t) - \phi_2(t))y$	bzw.	$y' = 0$.	

Hinweis: Berechnen Sie jeweils die logarithmische Ableitung y'/y .

Aufgabe 47 Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$(*) \quad x' = f(t, x) = \begin{cases} 2t & (x \leq 0) \\ 2t - 2x/t & (0 < x \leq t^2) \\ 0 & (x > t^2) \end{cases}, \quad x(0) = 0.$$

Skizzieren Sie das Richtungsfeld in $-2 < t < 2$, $-1 < x < 2$, und zeigen Sie:

- (i) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig, erfüllt $|f(t, x)| \leq 2|t|$ und genügt in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ einer lokalen Lipschitzbedingung bezgl. x ;
- (ii) die Folge der Picarditerierten (Φ_k) mit $\Phi_0(t) = 0$ besitzt zwei konvergente Teilfolgen, deren Grenzfunktionen das Anfangswertproblem aber *nicht* lösen;
- (iii) neben $x(t) = t^2/2$ gibt es keine weitere Lösung von (*).