Prof. Dr. Franz Kalhoff
Thomas Leßmann

Präsenzaufgaben (keine Abgabe)

Analytische Geometrie
Übungsblatt 0

Aufgabe 1:
Berechnen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(4,4)}$$

a) die Eigenwerte,

b) die zugehörigen Eigenräume sowie die verallgemeinerten Eigenräume,

c) eine Jordansche Normalform mit zugehöriger Jordanbasis und

d) eine explizite Darstellung von A^n für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2:
Geben Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 9 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & -6 \end{pmatrix} \in K^{(5,5)}$$

falls möglich, eine Jordansche Normalform für folgende Körper K an:

a) $K = \mathbb{C}$ b) $K = \mathbb{R}$ c) $K = \mathbb{F}_2$ d) $K = \mathbb{F}_3$ e) $K = \mathbb{F}_7$.

Aufgabe 3:
Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $L : V \to V$ ein Endomorphismus, dessen characteristisches Polynom über K in Linearfaktoren zerfällt. Für jeden Eigenwert λ von L bezeichne d_λ die geometrische und d'_λ die algebraische Vielfachheit sowie f_λ den Index von λ.
Zeigen Sie:

a) Es gilt $d_\lambda \leqslant d'_\lambda$ für jeden Eigenwert λ von L. Dabei gilt genau dann Gleichheit, wenn $L_{|E'(\lambda)}$ diagonalisierbar ist.

b) Es gilt $f_\lambda \leqslant d'_\lambda$ für jeden Eigenwert λ von L. Dabei gilt genau dann Gleichheit, wenn $E'(\lambda)$ irreduzibel ist.

Aufgabe 4:

Es sei $L : V \to V$ ein Endomorphismus eines n-dimensionalen Vektorraumes V. Beweisen Sie:

a) Analog zur Kernsequenz (vgl. Vorlesung) existiert die Bildsequenz

$$V = \text{Bild}(L^0) \supset \text{Bild}(L) \supset \text{Bild}(L^2) \supset \dots$$

und diese wird vom gleichen Index an konstant, wie die Kernsequenz.

b) Ist V euklidisch und L symmetrisch, so ist der Fittingindex von L kleiner gleich 1.