Prof. Dr. Franz Kalhoff
Thomas Leßmann

Abgabe: 28.08.2008, 12h

Analytische Geometrie

Übungsblatt 1

Aufgabe 1:

Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit $\mathbb{C}$-Basis $v_1, v_2, \dots v_n$.

a) Zeigen Sie, dass V auch ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist und dass $v_1, v_2, \dots v_n, iv_1, iv_2, \dots iv_n$ eine $\mathbb{R}$-Basis von V als $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

b) Es sei $L : V \to V$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung mit Darstellungsmatrix C bzgl. der $\mathbb{R}$-Basis $v_1, v_2, \dots v_n, iv_1, iv_2, \dots iv_n$ von V. Zeigen Sie:

   i) L ist genau dann $\mathbb{C}$-linear, wenn $C = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ mit $A, B \in \mathbb{R}^{(n,n)}$.

   ii) L ist genau dann $\mathbb{C}$-antilinear (d.h. $L(\lambda u + \mu v) = \overline{\lambda} u + \overline{\mu} v$ für alle $u, v \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$), wenn $C = \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix}$ mit $A, B \in \mathbb{R}^{(n,n)}$.

Aufgabe 2:

Bestimme Sie die reelle Jordansche Normalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(4,4)}$$

mit $a \in \mathbb{R}$ und eine zugehörige Jordanbasis.

Aufgabe 3:

Sei $n \in \mathbb{N},\ \lambda \in \mathbb{C}$ und $J(n, \lambda) \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ der elementare Jordanblock der Größe n.
Zeigen Sie:

a) Die Matrizen $J(n, \lambda)$ und $J(n, \lambda)^T$ sind ähnlich. Geben Sie dazu eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ an, für die $J(n, \lambda)^T = S^{-1} J(n, \lambda) S$ gilt.

b) Jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ ist ähnlich zu ihrer Transponierten A^T.

Aufgabe 4:

Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $L : V \to V$ ein Endomorphismus, dessen characteristisches Polynom über K in Linearfaktoren zerfällt.
Zeigen Sie:

a) Es existiert eine Darstellung $L = P + T$ von L, wobei P ein diagonalisierbarer und T ein nilpotenter Endomorphismus ist mit $P \circ T = T \circ P$.

b) Ist $L = P + T$ eine Darstellung von L wie in a), so stimmen die Eigenwerte von L und P überein und es gilt

$$E'(L, \lambda) = E(P, \lambda)$$

für jeden Eigenwert λ von L.

c) Zeigen Sie, dass die Darstellung von L in a) eindeutig ist.