Prof. Dr. Franz Kalhoff
Thomas Leßmann

Abgabe: 04.11.2008, 12h

Analytische Geometrie
Übungsblatt 2

Aufgabe 1:
Sei V ein endlich-dimensionaler, euklidischer Vektorraum und $L \in \mathcal{L}(V)$.
Zeigen Sie:

a) Die Abbildung $\varphi : \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V)$, $L \mapsto L^*$ ist ein Isomorphismus.

b) Ist L ein Isomorphismus, so auch L^* und es gilt $(L^*)^{-1} = (L^{-1})^*$.

c) Bild(L) und Kern(L^*) bilden eine orthogonale Zerlegung von V.

Aufgabe 2:
Sei V ein 3-dimensionaler, euklidischer Vektorraum, α, β, γ drei von Null verschiedene Linearformen auf V und $A = \text{Kern}(\alpha)$, $B = \text{Kern}(\beta)$, $C = \text{Kern}(\gamma)$. Die Spiegelungen an den Hyperebenen A, B und C seien wieder mit S_A, S_B bzw. S_C bezeichnet.
Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) Die Linearformen α, β, γ sind linear abhängig.

b) Die Unterräume A, B, C haben eine Gerade gemeinsam.

c) Es existiert eine Hyperebene D von V mit $S_A \circ S_B \circ S_C = S_D$.

Aufgabe 3:
Im $\mathbb{R}^3$ sei eine feste affine Gerade G, die nicht durch den Ursprung verläuft, sowie die Punkte $P_1 = (1, 1, 0), P_2 = (-1, 1, 0), P_3 = (1, -1, 0)$ und $P_4 = (-1, -1, 0)$, gegeben.
Beschreiben Sie alle Isometrien $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ für die jeweils gilt:

a) $L(0) = 0$ und $L(G) \subset G$

b) $L(P_i) \in \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ für $i = 1, 2, 3, 4$

c) $L(0) = 0$ und $L^2 = Id$

Aufgabe 4:
Sei V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Für eine affine Hyperebene H bezeichne S_H die affine Hyperebenenspiegelung an H (S_H ist die eindeutige Bewegung mit $S_H(v) = v \ \forall v \in H$ und $S_H \neq \text{Id}$, vgl. Blatt 9 Aufgabe 4 aus der linearen Algebra 2). Unter einer *Gleitspiegelung* versteht man die Hintereinanderausführung einer affinen Hyperebenenspiegelung (an einer affinen Hyperebene $H = u_0 + U$) mit anschließender Translation τ_v in einer zu U parallelen Richtung (d.h. $v \in U$). Sei nun $H = u_0 + U$ eine affine Hyperebene.
Zeigen Sie:

a) Für $v \in U^\perp$ ist $\tau_v \circ S_H$ eine affine Hyperebenenspiegelung. Geben Sie hierbei auch die zugehörige affine Hyperebene an.

b) Für $w \in V$ ist $\tau_w \circ S_H$ eine Gleitspiegelung.