Prof. Dr. Franz Kalhoff
Thomas Leßmann Abgabe: 11.11.2008, 14h

Analytische Geometrie
Übungsblatt 3

Aufgabe 1:

Sei V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum und seien L, L_1, L_2 Endomorphismen von V. Entscheiden Sie welche der folgenden Aussagen korrekt sind:

a) Sind L_1 und L_2 normal, so ist auch $L_1 + L_2$ normal.

b) Sind L_1 und L_2 normal, so ist auch $L_1 \circ L_2$ normal.

c) L ist genau dann normal, wenn $< L(u), L(v) >=< L^*(u), L^*(v) >$ für alle Vektoren $u, v \in V$ gilt.

d) Ist L schiefsymmetrisch und n ungerade, so ist L singulär.

e) L und L^* haben dieselben Eigenwerte.

f) Kern(L)=Kern(L^*L).

Aufgabe 2:

Sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass der zu A gehörige Endomorphismus $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$ normal ist.

b) Berechnen Sie die Normalform von L_A und geben Sie eine zugehörige Basis an.

Aufgabe 3:

Sei V ein endlich-dimensionaler, euklidischer Vektorraum, $a \in V$ mit $|a| = 1$ und $G = a_0 + \mathrm{sp}(a)$ mit $a_0 \in V$ eine Gerade in V. Eine Abbildung $\varphi : V \to V$ heißt *involutorisch*, wenn $\varphi \neq id_V$ und $\varphi^2 = id_V$ gilt. Zeigen Sie:

a) Ist H eine Ursprungsgerade, also $0 \in H$, und $L \in O(V)$ eine involutorische Abbildung, die genau die Punkte von H festlässt, so existiert eine Orthonormalbasis von V, bzgl. der die Matrix von L die Gestalt $\mathrm{diag}(-1, \ldots, -1, 1)$ besitzt.

b) Ist $H = \mathrm{sp}(a)$, so lässt sich der Endomorphismus L aus a) darstellen als

$$S_H : V \to V, v \mapsto 2\langle v, a\rangle a - v.$$

c) Sind φ_1, φ_2 Bewegungen von V, so ist $\varphi_2\varphi_1\varphi_2^{-1}$ genau dann involutorisch, wenn φ_1 involutorisch ist.

d) Sind φ_1, φ_2 Bewegungen von V, so ist ein Punkt $p \in V$ genau dann *Fixpunkt* von φ_1, d.h. es gilt $\varphi_1(p) = p$, wenn $\varphi_2(p)$ Fixpunkt von $\varphi_2\varphi_1\varphi_2^{-1}$ ist.

e) Jede involutorische Bewegung von V, die genau die Punkte der Geraden G festhält, besitzt die Form

$$S_G : V \to V, v \mapsto 2\langle v, a\rangle a - v + 2(a_0 - \langle a_0, a\rangle a).$$

Aufgabe 4:

a) Zeigen Sie, dass in $\mathrm{AG}(V, K)$ im Fall $|K| > 2$ die Bedingung (T') bereits aus (T) folgt.

b) Wie sehen in $\mathrm{AG}(V, \mathbb{F}_2)$ die (T) erfüllenden Teilmengen der Punktemenge aus?