Prof. Dr. Franz Kalhoff
Thomas Leßmann

Abgabe: 18.11.2008, 14h

Analytische Geometrie
Übungsblatt 4

Aufgabe 1:

Sei G eine Gruppe und N, H Untergruppen von G. Dann heißt G ein (inneres) semidirektes Produkt von N und H, falls gilt:

i) $G = NH$,

ii) N ist ein Normalteiler von G und

iii) $N \cap H = \{e_G\}$.

Zeigen Sie:

a) Ist G ein semidirektes Produkt von N und H, so gilt $G/N \cong H$.

b) Ist G ein semidirektes Produkt zweier Normalteiler N und H, so ist G auch das (innere) direkte Produkt dieser Normalteiler (vgl. Blatt 9 aus der Lina 2).

c) Ist G entweder die symmetrische Gruppe S_n, die Diedergruppen D_n (jeweils $n \geqslant 3$) oder die Gruppe $\mathrm{AO}(V)$ ($V \neq \{0\}$ ein euklidischer Vektoraum), so lässt sich G in ein semidirektes Produkt mit nicht trivialen Untergruppen zerlegen.

Aufgabe 2:

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $(\mathcal{P}, \mathcal{G}) = \mathrm{AG}(V, K)$ der affine Raum über V. Weiter seien $G, H \in \mathcal{G}$ zwei Geraden, die sich in genau einem Punkt $p \in \mathcal{P}$ schneiden, und $a, b \in G$, $c, d \in H$ Punkte, so dass p, a, b, c, d paarweise verschieden sind. Zeigen Sie, dass die Gerade $\overline{a, c}$ genau dann zu $\overline{b, d}$ parallel ist, wenn gilt $\mathrm{TV}(p, a; b) = \mathrm{TV}(p, c; d)$.

Aufgabe 3:

Seien V, W zwei endlich-dimensionale K-Vektorräume, $(\mathcal{P}_1, \mathcal{G}_1) = \mathrm{AG}(V, K)$, $(\mathcal{P}_2, \mathcal{G}_2) = \mathrm{AG}(W, K)$ affine Räume und $\varphi : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

a) Ist φ affin, so gilt

$$\varphi(a_0 + \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_k a_k) = \varphi(a_0) + \alpha_1 \varphi'(a_1) + \cdots + \alpha_k \varphi'(a_k)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_k \in \mathcal{P}_1$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in K$.

b) Es ist φ genau dann affin, wenn für alle $k \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \ldots, a_k \in \mathcal{P}_1$ und $\beta_0, \ldots, \beta_k \in K$ mit $\sum_{i=0}^k \beta_i = 1$ gilt

$$\varphi(\beta_0 a_0 + \cdots + \beta_k a_k) = \beta_0 \varphi(a_0) + \cdots + \beta_k \varphi(a_k).$$

c) Ist $\alpha \in Aut(K)$ und $a_0, a_1, \ldots, a_n$ eine affine Basis von $\mathrm{AG}(V, K)$, so wird $\psi : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_1$ mit Hilfe baryzentrische Koordinaten definiert durch

$$\sum_{i=0}^{n} \beta_i a_i \mapsto \sum_{i=0}^{n} \alpha(\beta_i) a_i,$$

wobei $\beta_0 + \ldots + \beta_n = 1$. Zeigen Sie, dass $\alpha(\beta_0) + \ldots \alpha(\beta_n) = 1$ gilt und dass ψ ein Automorphismus von $\mathrm{AG}(V, K)$ ist.

Aufgabe 4

Seien V, W zwei K-Vektorräume, $(\mathcal{P}_1, \mathcal{G}_1) = \mathrm{AG}(V, K)$, $(\mathcal{P}_2, \mathcal{G}_2) = \mathrm{AG}(W, K)$ affine Räume und $\varphi : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_1$, $\psi : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ affine Abbildungen.

a) Wie viele affine Basen besitzt $\mathrm{AG}(\mathbb{F}_p^n)$?

b) Zeigen Sie, dass die Fixpunktmenge $\mathrm{Fix}(\varphi) := \{p \in \mathcal{P}_1 \mid \varphi(p) = p\}$ ein Teilraum von $(\mathcal{P}_1, \mathcal{G}_1)$ ist.

c) Zeigen Sie für einen Teilraum T von $(\mathcal{P}_2, \mathcal{G}_2)$, dass $\psi^{-1}(T)$ ein Teilraum von $(\mathcal{P}_1, \mathcal{G}_1)$ ist.

d) Zeigen Sie: Sind $\Gamma_1 = a + U_1$ und $\Gamma_2 = a + U_2$ ($a \in \mathcal{P}_1$, U_1, U_2 Untervektorräume von V) Teilräume von $(\mathcal{P}_1, \mathcal{G}_1)$, so gilt

$$\overline{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = a + (U_1 + U_2).$$

e) Zeigen Sie: Sind $\Gamma_1 = a_1 + U_1$ und $\Gamma_2 = a_2 + U_2$ ($a_1, a_2 \in \mathcal{P}_1$, U_1, U_2 Untervektorräume von V) disjunkte Teilräume von $(\mathcal{P}_1, \mathcal{G}_1)$, so gilt:

$$\overline{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = a_1 + (\mathrm{sp}(a_2 - a_1) \oplus (U_1 + U_2)).$$