Prof. Dr. Franz Kalhoff
Thomas Leßmann

Abgabe: 25.11.2008, 14h

Analytische Geometrie
Übungsblatt 5

Aufgabe 1:
Sei V ein 2-dimensionaler, euklidischer Vektorraum und $(\mathcal{P},\mathcal{G}) = \mathrm{AG}(V,K)$ der affine Raum über V. Ein Punktetripel (a_1,a_2,a_3) heißt *Dreieck*, wenn $a_1,a_2,a_3 \in \mathcal{P}$ affin unabhängig sind. Zwei Dreiecke (a_1,a_2,a_3), (b_1,b_2,b_3) heißen *kongruent*, wenn eine Bewegung $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ existiert mit $\varphi(a_i) = b_i$ für $i = 1,2,3$. Zeigen Sie:

a) Sind zwei Dreiecke kongruent, so ist die zugehörige Bewegung eindeutig bestimmt.

b) Die Dreicke (a_1,a_2,a_3), (b_1,b_2,b_3) sind genau dann kongruent, wenn $d(a_1,a_2) = d(b_1,b_2)$, $d(a_1,a_3) = d(b_1,b_3)$ und $\measuredangle(a_2-a_1,a_3-a_1) = \measuredangle(b_2-b_1,b_3-b_1)$ gilt.

c) Die Dreicke (a_1,a_2,a_3), (b_1,b_2,b_3) sind genau dann kongruent, wenn $d(a_i,a_j) = d(b_i,b_j)$ für alle $i,j \in \{1,2,3\}$ mit $i < j$ gilt.

Aufgabe 2:
Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und C eine Quadrik in $\mathrm{AG}(V,\mathbb{R})$. Ein Punkt $m \in V$ heißt Mittelpunkt von Q, falls für alle $u \in V$ mit $m+u \in Q$ auch $m-u \in Q$ gilt. Ein Punkt $s \in V$ heißt Spitze von Q, falls für alle $u \in V\setminus\{0\}$ mit $m+u \in Q$ auch $\overline{m,u} \subset Q$ gilt.
Entscheiden Sie, welche der drei Quadriktypen aus Satz (12.23), unter der zusätzlichen Vorraussetzung $\overline{C} = V$,

a) einen Mittelpunkt haben.

b) eine Spitze haben.

Aufgabe 3:
Bezüglich der Standardbasis im $\mathbb{R}^3$ sei die Quadrik

$$C := \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 6x_1x_2 + 12x_1x_3 + 4x_2x_3 + 4x_1 - 4x_2 - 8x_3 - 8 = 0\right\}$$

aus $\mathrm{AG}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ gegeben. Bringen Sie diese auf affine Normalform und bestimmen Sie, falls vorhanden, ihre Mittelpunkte und Spitzen.

Aufgabe 4:
Seien G_1 und G_2 zwei verschiedene Geraden im $\mathbb{R}^3$ und Q die Menge der Punkte, die zu G_1 und G_2 den gleichen Abstand haben. Zeigen Sie für die Fälle

a) G_1 und G_2 sind parallel

b) G_1 und G_2 sind windschief

jeweils, dass Q eine Quadrik ist und bestimmen Sie die zugehörige Normalform.