Prof. Dr. Franz Kalhoff
Thomas Leßmann

Abgabe: 02.12.2008, 14h

Analytische Geometrie
Übungsblatt 6

Aufgabe 1:
Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $(\mathcal{P}, \mathcal{G}) = \mathrm{AG}(V, K)$ der affine Raum über V. Eine affine Abbildung $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ heißt *Dilatation*, wenn $\varphi(G)$ für jede Gerade $G \in \mathcal{G}$ parallel zu G ist.
Sei $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ eine affine Abbildung. Zeigen Sie:

a) φ ist genau dann eine Dilatation, wenn ein $\lambda \in K$ existiert mit $\varphi' = \lambda \cdot id_{\mathcal{P}}$.

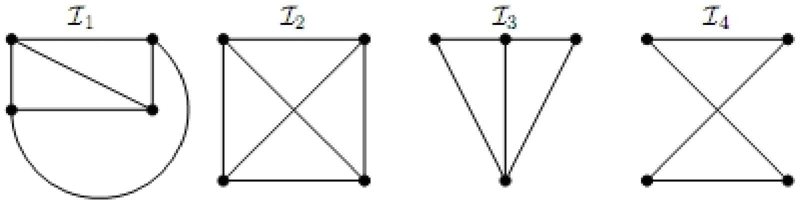
b) Ist φ eine Dilatation, so besitzt φ entweder genau einen Fixpunkt oder ist eine Translation.

Aufgabe 2:
Sei G eine Gruppe. Die Menge $Z(G) := \{g \in G \mid gh = hg \ \forall h \in G\}$ wird als Zentrum von G bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass $Z(G)$ ein Normalteiler von G ist.

b) Sei nun K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie $Z(\mathrm{GL}(n, K)) = \{\lambda \cdot I_n \mid \lambda \in K^*\}$.

Aufgabe 3:
Seien die folgenden vierpunktigen Räume gegeben



a) Welche der obigen Räume sind als Inzidenzräume isomorph?

b) Geben Sie alle Inzidenzräume mit fünf Punkten an (bis auf Isomorphie).

c) Geben Sie zwei nicht-isomorphe Inzidenzräume mit gleicher Punkte und gleicher Geradenanzahl an. (Dies ist ab 6 Punkten möglich).

Die Augabe 4 ist eine Zusatzaufgabe. Sie können hier ebenfalls 4 Punkte bekommen. Die insgesamt zu erreichende Punktzahl berechnet sich aber nur aus den regulären Aufgaben.

Aufgabe 4:

Seien P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 Punkte in $\mathrm{AG}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, so dass jeweils drei dieser Punkte affin unabhängig sind. In dieser Aufgabe sollen Sie zeigen, dass es dann genau eine Quadrik C gibt, die diese Punkte enthält. Sie können dazu die folgenden Zwischenschritte beweisen:

(1) Es genügt die Aussage für den Fall $P_1 = (0,0), P_2 = (1,0), P_3 = (0,1), P_4 = (\xi, \nu), P_5 = (\lambda\xi, \mu\nu)$ mit $\xi, \nu, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ zu zeigen.

(2) Ist $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\}$, so liegen die Punkte aus (1) genau dann auf C, wenn die folgenden Gleichungen in den Unbekannten a, b, c, d, e, f erfüllt sind

$$\begin{aligned} &f = 0 \\ &a + d = 0 \\ &b + e = 0 \\ &\xi(\xi - 1)a + \nu(\nu - 1)c + \xi\nu b = 0 \\ &\lambda\xi(\lambda\xi - 1)a + \mu(\mu - 1)c + \lambda\mu\xi\nu = 0 \end{aligned} \qquad .$$

(3) Die Lösungsmenge des Gleichungssystems aus (2) ist (unter der Vorraussetzung der Aufgabenstellung) eindimensional. [Zeigen Sie hierzu: Falls die letzten beiden Gleichungen aus (2) äquivalent wären, so müsste $(\lambda+1)(\xi+\nu+1) = 0$ und $(\mu+1)(\xi+\nu+1) = 0$ gelten und erklären Sie, dass dies ein Widerspruch zur Vorraussetzung ist].