Prof. Dr. Franz Kalhoff
Thomas Leßmann Abgabe: 09.12.2008, 14h

Analytische Geometrie
Übungsblatt 7

Aufgabe 1:
Entscheiden Sie für die Mengen

a) $\mathcal{P} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$
$\mathcal{G} = \{U \cap \mathcal{P} \mid U$ ist 2-dimensionaler Untervektorraum$\}$

b) $\mathcal{P} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$
$\mathcal{G} = \{U \cap \mathcal{P} \mid U$ ist 1-dimensionaler affiner Teilraum mit $U \cap \mathcal{P} \neq \emptyset\}$

c) $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$
$\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2 \cup \mathcal{G}_3$, mit

$\mathcal{G}_1 = \bigcup_{a\in\mathbb{R}} \{(x,y) | x = a\}$ senkrechte Geraden

$\bigcup_{b\in\mathbb{R}, m\geqslant 0} \{(x,y) | y = mx + b\}$ Geraden mit positiver Steigung

$\bigcup_{b\in\mathbb{R}, m<0} \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{ll} y = mx+b & \text{falls } x \geqslant 0 \\ y = \frac{m}{2}x + b & \text{falls } x < 0 \end{array} \right\}$ abgecknickte Geraden mit negativer Steigung

d) $\mathcal{P} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$
$\mathcal{G} = \{K(x_0, r) \mid x \in \mathbb{R}, r > 0\} \cup \bigcup_{a\in\mathbb{R}} \{(x,y) \in \mathcal{P} | x = a\}$
Dabei sei $K(x_0, r) = \{(x,y) \in \mathcal{P} \mid \|(x,y) - (x_0, 0)\| = r\}$ der Halbkreisbogen um $(x_0, 0)$ mit Radius r.

jeweils, welche der Axiome (I1), (E), (P) und (S) erfüllt sind (jeweils ohne Beweis).

Aufgabe 2:
Es seien $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine projektive Ebene und $G, H \in \mathcal{G}$ zwei verschiedene Geraden. Eine Abbildung $\phi : G \to H$ heißt Projektivität, wenn es Geraden $G = G_1, G_2, \ldots, G_{n-1}, G_n = H$ und Perspektivitäten $\phi_i : G_i \to G_{i+1}$ $(i = 1, ..., n-1)$ gibt, mit $\phi = \phi_{n-1} \circ \phi_{n-2} \circ \ldots \circ \phi_1$.
Es seien nun $x_i \in G$ und $y_i \in H$ $(i = 1, 2, 3)$ mit $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_1$ und $y_1 \neq y_2 \neq y_3 \neq y_1$.
Zeigen Sie für die Fälle

a) $x_1 = y_1$

b) $x_1 \neq y_1$

jeweils, dass es eine Projektivität $\phi : G \to H$ gibt mit $\phi(x_i) = y_i$ für $i = 1, 2, 3$.

Aufgabe 3:
Sei $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine endliche affine Ebene. Die *Ordnung* von $\mathcal{A}$ ist die Anzahl der mit einer festen Gerade $G \in \mathcal{G}$ inzidierenden Punkte und wird mit $\operatorname{ord}(\mathcal{A})$ bezeichnet.
Zeigen Sie, dass für $n = \operatorname{ord}(\mathcal{A})$ die folgenden Aussagen erfüllt sind:

a) Es ist $|\mathcal{P}| = n^2$.

b) Jeder Punkt $p \in \mathcal{P}$ liegt auf genau $n + 1$ paarweise verschiedenen Geraden.

c) Es ist $|\mathcal{G}| = n^2 + n$.

d) $\mathcal{G}$ besitzt genau $n + 1$ paarweise verschiedene Parallelenbüschel.

e) Jedes Parallelenbüschel enthält genau n Geraden.

Aufgabe 4:

Eine $n \times n$-Matrix A mit Einträgen aus $\{1, \ldots, n\}$ heißt lateinisches Quadrat (LS) der Ordnung n, wenn in jeder Zeile und jeder Spalte von A jede Ziffer aus $\{1, \ldots, n\}$ genau einaml vorkommt. Zwei lateinische Quadrate $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ heißen orthogonal, wenn die n^2 Tupel (a_{ij}, b_{ij}) mit $1 \leq i, j \leq n$ paarweise verschieden sind.

a) Die affine Ebene $\mathrm{AG}(\mathbb{F}_5^2, \mathbb{F}_5)$ besitzt 6 Parallenbüschel $\mathcal{G}_1, \ldots \mathcal{G}_6$ mit jeweils 5 parallelen Geraden, die willkürlich aber fest so nummeriert seien, dass $\mathcal{G}_s = \{G_{s,1}, ..., G_{s,5}\}$ für $s = 1 \ldots 6$. Jedem Punkt $p \in \mathcal{P}$ wird nun eindeutig ein Koordinatentupel (i_p, j_p) $(1 \leq i_p, j_p \leq 5)$ zugeordnet durch

$$p \to (i_p, j_p) \;\Leftrightarrow\; p \in G_{1,i_p} \cap G_{2,j_p}.$$

Für $3 \leq s \leq 6$ sei nun die Matrix $A^s = (a^s_{i,j})$ durch

$$a^s_{i,j} = m :\Leftrightarrow \text{Der Punkt mit den Koordinaten } (i,j) \text{ liegt in } G_{s,m}$$

definiert. Berechnen Sie A^3, A^4, A^5, A^6. Sind diese Matrizen lateinische Quadrate? Sind sie paarweise orthogonal?

b) Zeigen Sie: Falls es eine affine Ebene der Ordnung n gibt, so gibt es $n-1$ paarweise orthogonale lateinische Quadrate der Ordnung n.