Prof. Dr. Franz Kalhoff
Thomas Leßmann

Abgabe: 16.12.2008, 14h

Analytische Geometrie
Übungsblatt 8

Aufgabe 1:
Es sei $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine endliche projektive Ebene und $G \in \mathcal{G}$ eine Gerade in Π. Weiter bezeichne $n := |G| - 1$ die Ordnung von Π. Zeigen Sie:

a) $|H| = n + 1$ für alle $H \in \mathcal{G}$

b) Jeder Punkt $p \in \mathcal{P}$ liegt auf genau $n + 1$ paarweise verschiedenen Geraden.

c) Es gilt $|\mathcal{G}| = n^2 + n + 1$.

d) Es gilt $|\mathcal{P}| = n^2 + n + 1$.

Aufgabe 2:
Sei $S = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}$ die Oberfläche der Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{P} = \{\{x, -x\} \mid x \in S\}$ die Menge der Paare gegenüberliegender Punkte von S und $\mathcal{G} = \{G_U \mid U \text{ ist 2 dim. Untervektorraum}\}$, wobei $G_U = \{p \in \mathcal{P} \mid p \subset U\}$ die Menge der Punktpaare ist, die auf dem durch U gegebenen Großkreis liegen. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine projektive Ebene ist.

Aufgabe 3:
Sei $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine projektive Ebene und $U \in \mathcal{G}$. Zeigen Sie:

a) $(\mathcal{P}, \mathcal{G})_U = (P \backslash U, \mathcal{G} \backslash \{U\}, \in)$ ist eine affine Ebene (vgl. Bem. 13.23).

b) Der projektive Abschluss von $(\mathcal{P}, \mathcal{G})_U$ ist isomorph zu $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$.

c) Geht man von einer affinen Ebene aus, bildet ihren projektiven Abschluss und dann die affine Restriktion bzgl. der uneigentlichen Geraden, so erhält man eine zur Ausgangsebene isomorphe Ebene.

Aufgabe 4:

a) Es seien $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine projektive Ebene, $U \in \mathcal{G}$ und $\phi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ ein Automorphismus von $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ mit $\phi(U) = U$. Zeigen Sie, dass die Beschränkung ψ von ϕ auf $\mathcal{P} \backslash U$ ein Automorphismus von $(\mathcal{P}, \mathcal{G})_U$ ist.

b) Es seien $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ eine affine Ebene und $\psi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ ein Automorphismus von $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$. Zeigen Sie dass sich ψ eindeutig zu einem Automorphismus ϕ des projektiven Abschlusses von $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ fortsetzen läßt. (Beweisen Sie zuerst: $G \parallel H \Leftrightarrow \psi(G) \parallel \psi(H)$ für alle $G, H \in \mathcal{G}$.)