Prof. Dr. Franz Kalhoff
Thomas Leßmann

Abgabe: 6.1.2009, 14h

Analytische Geometrie
Übungsblatt 9

Aufgabe 1:

Sei V ein $(n+1)$-dimensionaler K-Vektorraum und $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{G}) = \mathrm{PG}(V, K)$ der n-dimensionale projektive Raum über V. Zeigen Sie, dass Π das Veblen Axiom erfüllt, d.h. dass gilt:

Sind $a, b, c, d \in \mathcal{P}$ paarweise verschieden mit $\overline{a, b} \cap \overline{c, d} \neq \emptyset$,
so folgt $\overline{a, c} \cap \overline{b, d} \neq \emptyset$.

Aufgabe 2:

Seien $A^s = (a^s_{xy})_{1 \leq x,y \leq n}$ für $3 \leq s \leq n+1$ paarweise orthogonale lateinische Quadrate der Ordnung n. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine affine Ebene ist, wobei

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &:= \{(i, j) \mid 1 \leq i, j \leq n\} \\
\mathcal{G} &:= \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{G}_{n+1} \\
\mathcal{G}_1 &:= \{\{(x, y) | y = c\} \mid c = 1, \ldots, n\} \\
\mathcal{G}_2 &:= \{\{(x, y) | x = c\} \mid c = 1, \ldots, n\} \\
\mathcal{G}_s &:= \left\{\left\{(x, y) | a^s_{xy} = m\right\} \mid m = 1, \ldots, n\right\} \text{ für } s = 3, \ldots, n+1
\end{aligned}$$

Aufgabe 3:

Sei $(V, \langle . \rangle)$ ein reeller euklidischer Vektorraum. Für je zwei Punkte a, b des projektiven Raumes $\mathrm{PG}(V, \mathbb{R}) = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ führe man auf folgende Weise eine Entfernung $d(a, b)$ ein:
Zu a, b wähle $a', b' \in V \setminus \{0\}$ mit $a = \mathrm{sp}(a'), b = \mathrm{sp}(b')$ und $||a'|| = ||b'|| = 1$.
Dann sei $d(a, b) := \min \{||a' - b'||, ||a' + b'||\}$. Man zeige:

a) d ist eine wohldefinierte Metrik auf dem projektiven Raum $\mathrm{PG}(V, \mathbb{R})$.

b) Eine Punktfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{P}$ konvergiert genau dann gegen $b \in \mathcal{P}$ im Sinne dieser Metrik, wenn es $a'_n, b' \in V \setminus \{0\}$ gibt mit $a_n = \mathrm{sp}(a'_n), b = \mathrm{sp}(b')$, so dass (bzgl. der Norm $||.||$) $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen b' konvergiert .

Aufgabe 4:

Beweisen Sie den Satz 14.16 aus der Vorlesung:
Sind $a'_2, a'_3, a'_4 \in K^2$ kollineare Punkte von $\mathrm{AG}(K^2, K)$ mit $a'_2 \neq a'_3$, etwa

$$a'_i = c + \lambda_i d$$

mit festen $c, d \in K^2, d \neq 0, \lambda_i \in K, \lambda_2 \neq \lambda_3$ und $i = 2, 3, 4$. Dann gilt für die projektiven Punkte $a_i = \varphi(a'_i)$ und den Fernpunkt a_1 der Geraden $\psi(c + \mathrm{sp}(d))$:

$$\mathrm{DV}(a_1, a_2, a_3, a_4) = \frac{\lambda_4 - \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2}.$$

Frohe Weihnachten und einen guten

Rutsch ins Neue Jahr