Prof. Dr. Franz Kalhoff
Thomas Leßmann

Abgabe: 13.1.2009, 14h

Analytische Geometrie

Übungsblatt 10

Aufgabe 1:

Im $\mathbb{R}^3$ seien die vier Vektoren $b_0' = (1,0,0), b_1' = (1,1,0), b_2' = (0,0,1), e' = (2,3,1)$ gegeben. Weiter bezeichne $b_i := \mathrm{sp}(b_i'), e := \mathrm{sp}(e')$ für $i = 0,1,2$ die zugehörigen Punkte in $\Pi :=\mathrm{PG}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

a) Zeigen Sie, dass $C := (b_0, b_1, b_2, e)$ ein projektives Koordinatensystem von Π ist.

b) Finden Sie eine Basis B von $\mathbb{R}^3$ mit $\breve{B} = (b_0, b_1, b_2, e)$ (vgl. Satz 15.11(b)).

c) Geben Sie homogene Koordinaten von dem Punkt $p := \mathrm{sp}(4,6,9)$ bzgl. C an.

Aufgabe 2:

Sei V ein dreidimensionaler Vektorraum über einem Körper K und $\mathrm{PG}(V,K)=(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \subset)$ die projektive Ebene über V. Weiter seien $G, H \in \mathcal{G}$ und $\phi : G \to H$ eine Projektivität (vgl. Blatt 7). Zeigen Sie, dass es ein $\tilde{\sigma} \in\mathrm{PGL}(V)$ mit $\tilde{\sigma}(x) = \phi(x)\ \forall x \in G$ gibt.

Hinweis: Untersuchen Sie zuerst den Fall, dass ϕ eine Perspektivität ist.

Aufgabe 3:

Sei V ein K-Vektorraum und $\mathrm{PG}(V,K)$ der projektive Raum über V. Zeigen Sie:

a) Jedes $\tilde{\sigma} \in\mathrm{PGL}(V)$ lässt das Doppelverhältniss invariant.

b) Für $\dim(V)$=3 lässt jede Projektivität das Doppelverhältniss invariant.

Aufgabe 4:

Sei V ein dreidimensionaler Vektorraum über einem Körper K und a, b, c, d Punkte in $\mathrm{PG}(V,K)$ die ein Viereck bilden. Weiter seien p, q zwei Diagonalpunkte, also z.B.

$$p = \overline{a,b} \cap \overline{c,d} \quad q = \overline{b,c} \cap \overline{a,d}$$

und x, y die Schnittpunkte der beiden noch nicht benutzten Seiten mit $\overline{p,q} =: G$, also $x := \overline{a,c} \cap G$ und $y := \overline{b,d} \cap G$. Zeigen Sie, dass die vier Punkte p, q, x, y in harmonischer Lage liegen, d.h. dass $\mathrm{DV}(p,q,x,y)$=-1 gilt.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\mathrm{DV}(p,q,x,y)=\mathrm{DV}(q,p,x,y)$ indem Sie zwei mal Aufgabe 3b mit Perspektivitäten zwischen den Geraden G und $\overline{b,d}$ benutzen.