Prof. Dr. Franz Kalhoff
Thomas Leßmann

Abgabe: 20.01.2009, 14h

Analytische Geometrie
Übungsblatt 11

Aufgabe 1:

In der projektiven Geraden Π:=PG$(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$ seien die beiden Koordinatensystem $C_1 = (b_0, b_1, e)$ und $C_2 = (c_0, c_1, d)$ mit $b_0 = \mathrm{sp}(1,3), b_1 = \mathrm{sp}(2,4), e = \mathrm{sp}(-1,1), c_0 = \mathrm{sp}(4,3), c_1 = \mathrm{sp}(3,2)$ und $d = \mathrm{sp}(0,1)$ gegeben. Nach Satz 15.21 gibt es genau eine Kollineation $\varphi \in$PGL(Π) mit $\pi(C_1) = C_2$. Bestimmen Sie das Bild von sp$(4,6)$ unter dieser Kollineation.

Aufgabe 2:

Für $f \in K[X_1, ..., X_n]$ mit

$$f = \sum_{i=(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{N}_0^n} c_i X_1^{i_1} \cdot \dots \cdot X_n^{i_n}$$

definiere den Grad durch $deg(f) := \max\left\{i_1 + i_2 + \cdots + i_n \mid i \in \mathbb{N}_0^n, c_i \neq 0\right\}$. Weiter sei das zu f homogensierte Polynom $\tilde{f} \in K[X_1, \dots X_n, X_{n+1}]$ definiert durch:

$$\tilde{f} := \sum_{i\in\mathbb{N}_0^n} c_i X_1^{i_1} \cdot \dots \cdot X_n^{i_n} X_{n+1}^{\deg(f)-\deg\left(X_1^{i_1}\cdot\dots\cdot X_n^{i_n}\right)}.$$

a) Geben Sie $\tilde{f}$ für $f = 2X_1^4 + 3X_1^2 + X_1X_2 + 5 \in K[X_1, X_2]$ an.
b) Zeigen Sie, dass für eine Nullstelle $x = (x_1, \dots x_n, x_{n+1})$ von $\tilde{f}$ ($f \in K[X_1, \dots, X_n]$) und $\alpha \in K$ auch $\alpha \cdot x$ eine Nullstelle von $\tilde{f}$ ist.
c) Zeigen Sie: Ist $(y_1, \dots, y_n)$ ein Nullstelle von f, so ist $(y_1, \dots, y_n, 1)$ eine Nullstelle von $\tilde{f}$. Ist umgekehrt $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ mit $x_{n+1} \neq 0$ eine Nullstelle von $\tilde{f}$, so ist $\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_1}{x_{n+1}}\right)$ eine Nullstelle von f.

Aufgabe 3:

Für eine Quadrik in AG$(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ gegeben durch eine quadratische Gleichung $Q(x_0, x_1) = 0$
Für jede der affinen Normalformen aus (12.27) (Quadriken in AG$(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$) mit zugehöriger Gleichung $Q(x_1, x_2) = 0$ sei

$$V(\tilde{Q}) := \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \tilde{Q}(x_1, x_2, x_3) = 0\right\}$$

und $\mathcal{P}\left(V(\tilde{Q})\right)$ die Menge der zugehörigen Punkte in PG$(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Beschreiben Sie jeweils (ggfs. mit Skizze) die Mengen $V(\tilde{Q}), \mathcal{P}\left(V(\tilde{Q})\right)$ und die Menge der Fernpunkte, d.h. $\mathcal{P}\left(V(\tilde{Q})\right) \cap \mathcal{P}(U)$, wobei $U = \mathrm{sp}(e_1, e_2)$ die Ferngerade ist.

Aufgabe 4:

Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum ($n \geq 1$) über einem Körper K mit Basis $b_1, \ldots b_n$. Eine bijektive Abbildung $\sigma : V \to V$ heißt semlinear, wenn es einen Automorphismus $\bar{\sigma} \in$Aut(K) mit

$$\begin{aligned} \sigma(\lambda v) &= \bar{\sigma}(\lambda)\sigma(v) \\ \sigma(v + w) &= \sigma(v) + \sigma(w) \quad \forall v, w \in V, \lambda \in K \end{aligned}$$

gibt. Zeigen Sie:

a) Die Menge $\Gamma\mathrm{L}(V, K)$ aller semilinearen Abbildungen von V bildet mit der Komposition eine Gruppe.

b) Die Abbildung $\bar{\cdot} : \Gamma\mathrm{L}(V, K) \to \mathrm{Aut}(K)$, $\sigma \mapsto \bar{\sigma}$ ist ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus mit $\mathrm{GL}(V, K)$ als Kern und es gilt $\Gamma\mathrm{L}(V, K)/\mathrm{GL}(V, K) \cong \mathrm{Aut}(K)$.

c) Zu $\sigma \in \Gamma\mathrm{L}(V, K)$ existiert eine eindeutige lineare Abbildung $L \in \mathrm{GL}(V)$, so dass für alle $x \in K^n$ gilt:

$$\sigma\left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \bar{\sigma}(x_i) L(b_i).$$