Prof. Dr. Franz Kalhoff
Thomas Leßmann

Abgabe: 27.01.2009, 14h

Analytische Geometrie

Übungsblatt 12

Aufgabe 1:

Sei V ein $n+1$-dimensionaler Vektorraum ($n \geq 1$) über einem Körper K und $\Pi = \mathrm{PG}(V, K) = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ der projektive Raum über V. Zeigen Sie:

a) Jedes $\sigma \in \Gamma\mathrm{L}(V, K)$ (siehe Blatt 11 Aufgabe 4) liefert durch $\tilde{\sigma} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$

$$\tilde{\sigma}\,(\mathrm{sp}\,(v')) = \mathrm{sp}\,(\sigma(v'))$$

eine Kollineation von Π.

b) $\tilde{\cdot}$ ist ein Gruppenhomomorphismus von $\Gamma\mathrm{L}(V, K)$ in $\Gamma\,(\Pi)$ (die Kollineationsgruppe von Π) mit Kern $\{\lambda \mathrm{Id} \mid \lambda \in K^*\}$.

c) Es gilt $\mathrm{P}\Gamma\mathrm{L}(V, K) := \mathrm{Bild}(\tilde{\cdot}) \cong \Gamma\mathrm{L}(V, K) / \{\lambda \mathrm{Id} \mid \lambda \in K^*\}$.

Aufgabe 2:

Es seien K ein Körper, ω ein Element mit $\omega \notin K$ und $\bar{K} := K \cup \{\omega\}$. Eine Abbildung $f : \bar{K} \to \bar{K}$ heißt gebrochen-lineare Transformation über $\bar{K}$, wenn es $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$ gibt, mit $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, so dass für alle $x \in K$ gilt:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} & \text{für } \gamma x + \delta \neq 0 \\ \omega & \text{für } \gamma x + \delta = 0 \end{cases} \quad \text{und } f(\omega) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\gamma} & \text{für } \gamma \neq 0 \\ \omega & \text{für } \gamma = 0 \end{cases}$$

Bezeichne $f_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ die zu $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gehörige Transformation und $L(K)$ die Menge aller gebrochen-linearen Transformationen von $\bar{K}$. Außerdem bezeichne $PG(K^2, K) = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ und

$$\mathrm{PGL}(2, K) = \left\{ K^* \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in K \text{ und } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \right\}.$$

a) Zeigen Sie, dass durch ψ :$\mathrm{PGL}(2, K) \to L(K)$ mit

$$K^* \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \mapsto f_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$$

eine bijektive Abbildung defniert wird.

b) Zeigen Sie, dass ψ ein Isomorphismus ist.

Hinweis: Die Elemente aus $\mathrm{PGL}(2, K)$ definieren durch Multiplikation Abbildunen von $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$. Zeigen Sie für b) zunächst, dass bei passender Identifikation von $\mathcal{P}$ mit $K \cup \{\omega\}$ die Abbildungen $K^* \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ und $f_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ für alle $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ mit $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ dieselbe Wirkung haben.

Aufgabe 3:

Sei K ein Körper, Π=PG(K^3, K) die projektive Ebene über K und G eine fest gewählte Gerade in Π. Weiter sei $\Phi(K)$ die Gruppe der Projektivitäten von G nach G. Zeigen Sie, dass $\Phi(K)$ und PGL$(2, K)$ (siehe Aufgabe 2) isomorph sind.

Hinweis: Sie können hier die Aussage von Aufgabe 2 auf Blatt 7 (auch für $G = H$) benutzen. Außerdem können die Aufgaben vom Blatt 10 hilfreich sein.

Aufgabe 4:

Wir betrachten den Polynomring $K[X]$ mit der Basis $(X^i)_{i\in\mathbb{N}_0}$. Für $i \in \mathbb{N}_0$ seien durch

$$h_i : \begin{array}{l} X^i \mapsto 1 \\ X^j \mapsto 0 \quad \text{für } j \neq i \end{array}$$

lineare Abbildungen von $K[X]$ nach K definiert. Zeigen Sie:

a) Die Abbildungen h_i sind in $\mathbb{R}[X]^*$ linear unabhängig.

b) Die Menge $\mathrm{sp}\{h_i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ ist eine echte Teilmenge von $\mathbb{R}[X]^*$.