Prof. Dr. Franz Kalhoff
Thomas Leßmann

Abgabe: 03.02.2009, 14h

Analytische Geometrie
Übungsblatt 13

Aufgabe 1:
Es sei $C[a,b]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller stetigen rellen Funktionen f, definiert auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Man definiere für jedes $n \in \mathbb{N}_0$, $g \in \mathbb{C}[a,b]$ und $\alpha \in [a,b]$ die Funktionen

$$\begin{aligned} \lambda_n &: C[a,b] \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_a^b x^n f(x)\mathrm{dx} \\ \lambda_g &: C[a,b] \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_a^b g(x)f(x)\mathrm{dx} \\ \delta_\alpha &: C[a,b] \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(\alpha). \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

a) Jedes λ_n ist eine Linearform.

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sind die Linearformen $\lambda_0, \dots \lambda_n$ linear unabhängig.

c) Für $\alpha \in [a,b]$ gibt es keine stetige Funktion $g \in C[a,b]$, so dass $\delta_\alpha = \lambda_g$ gilt.

Hinweis zu c): Für gewähltes $g \in C[a,b]$ und $\alpha \in [a,b]$ betrachte man die Funktion $f(x) = (x-\alpha)^2 g(x)$.

Aufgabe 2:
Wir betrachten über einem Körper K das lineare Gleichungssystem (G) und das zugehörige homogene transponierte System $(\tilde{H})$:

$$(G): \left\{ \begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & +\ldots+ & a_{1n}x_n & = & b \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1}x_1 & +\ldots+ & a_{pn}x_n & = & b_p \end{array} \right. \qquad (\tilde{H}): \left\{ \begin{array}{ccccc} a_{11}y_1 & +\ldots+ & a_{p1}y_n & = & b \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n}y_1 & +\ldots+ & a_{pn}y_n & = & b_p \end{array} \right. .$$

Zeigen Sie, dass (G) genau dann lösbar ist, wenn für alle Lösungs-p-Tupel $(y_1, ..., y_p)$ von $(\tilde{H})$ gilt:

$$y_1 b_1 + \ldots + y_p b_p = 0.$$

Aufgabe 3:
Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, $U \subset V$ ein Untervektorraum von V und $\pi : V \to V/U$ die Projektionsabbildung von V auf den Quotientenraum V/U.

a) Zeigen Sie, dass die zu π duale Abbildung $\pi^* : (V/U)^* \to V^*$ injektiv ist.

b) Zeigen Sie, dass das Bild von π^* genau aus den linearen Abbildungen $\lambda : V \to K$ besteht, deren Einschränkung $\lambda|_U$ auf U die Nullabbildung ist.

c) Geben Sie einen Isomorphismus von $V^*/\pi^*((V/U)^*)$ auf U^* an.

Aufgabe 4:
Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass $K[X]^*$ keine abzählbare Basis besitzt.