Prof. Dr. L. Schwachhöfer
Dr. F. Klinker

WS 2008/2009

Übungsblatt 2 zur Vorlesung Lineare Algebra 1

Aufgabe 1:

Es sei M eine endliche Menge und $f : M \to M$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass f genau dann surjektiv ist, wenn f injektiv ist. Ist das auch für $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wahr?

Aufgabe 2:

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ der Menge M sei mit der in der Vorlesung eingeführten Verknüpfung $\triangle$ versehen. Diese ist durch

$$M \triangle N := (M \setminus N) \cup (N \setminus M)$$

definiert. Zeigen Sie, dass $\triangle$ assoziativ ist.

Aufgabe 3:

Eine Abbildung $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *Polynom*, wenn es Zahlen $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

gilt. Es sei nun $\mathfrak{P}$ die Menge aller Polynome versehen mit punktweiser Addition und punktweiser Multiplikation, d.h. für zwei Polynome $p, q \in \mathfrak{P}$ sind $p + q$ und $p \cdot q$ definiert durch

$$(p+q)(x) := p(x) + q(x), \qquad (p \cdot q)(x) := p(x)q(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

a) Überzeugen Sie sich davon, dass die Verknüpfungen wohldefiniert sind.

b) Zeigen Sie, dass $(\mathfrak{P}, +)$ eine Gruppe ist.

c) Zeigen Sie, dass $(\mathfrak{P}, \cdot)$ eine Halbgruppe ist.

d) Bestimmen Sie alle bezüglich $\cdot$ invertierbaren Elemente in $\mathfrak{P}$.

Aufgabe 4:

Betrachten Sie die Menge $M := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ mit der Verknüpfung

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $(M, \cdot)$ eine Halbgruppe ist.

b) Geben Sie alle bezüglich $\cdot$ invertierbaren Elemente in M an.

Hinweis: Berechnen Sie $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.