Prof. Dr. L. Schwachhöfer
Dr. F. Klinker

WS 2008/2009

Übungsblatt 3 zur Vorlesung
Lineare Algebra 1

Aufgabe 1:

Es sei $L := \{(a,b,c)|a,b,c \in \mathbb{R}\}$. Wir versehen L mit der Verknüpfung

$$(a,b,c) \star (a',b',c') := (a+a', ac'+b+b', c+c')\,.$$

Zeigen Sie, dass $(L,\star)$ eine Gruppe ist. Ist diese Gruppe kommutativ?

Aufgabe 2:

Es sei $C := \{(x,y)|x,y \in \mathbb{R}\}$ versehen mit den Verknüpfungen

$$(x,y) + (x',y') := (x+x', y+y')$$
$$(x,y) \cdot (x',y') := (xx'-yy', xy'+yx')$$

a) Zeigen Sie, dass $(C,+)$ eine abelsche Gruppe ist,

b) Zeigen Sie, dass $(C,\cdot)$ eine kommutative Halbgruppe ist,

c) Bestimmen Sie die Menge C^* aller bezüglich $\cdot$ invertierbaren Elemente (Insbesondere ist dann $(C^*,\cdot)$ eine Gruppe), und zeigen Sie, dass $(C,+,\cdot)$ ein Körper ist.

Hinweis: Berechnen Sie $(x,y)\cdot(x,-y)$.

Aufgabe 3:

Es sei $(G,\cdot)$ die Gruppe der invertierbaren Elemente in der Halbgruppe $(M,\cdot)$ aus Aufgabe 4 vom Übungsblatt 2, das heißt: $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a,b,c,d \in \mathbb{R} \wedge ad-bc \neq 0 \right\}$.

a) Zeigen Sie, dass die Teilmenge $\widehat{C}^* = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G \big| a = d \wedge c = -b \right\}$ eine Untergruppe von G ist und zeigen Sie, dass die Gruppen $(\widehat{C}^*,\cdot)$ und $(C^*,\cdot)$ isomorph sind.

b) Vergrößern Sie die Menge $\widehat{C}^* \subset G \subset M$ geeignet zu einer Menge $\widehat{C} \subset M$ und definieren sie dort eine Verknüpfung $+$, so dass $(\widehat{C},+)$ und $(C,+)$ als Gruppen isomorph sind. Ist bei Ihrer Wahl auch $(\widehat{C},+,\cdot)$ ein Körper?

Aufgabe 4:

Gegeben sei die Teilmenge $A := \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \subset \mathcal{S}_4$. Ferner betrachten Sie die Menge $\mathbb{Z}_2 := \{0,1\}$ mit der Verknüpfung $+$ derart, dass $0+0=0$, $0+1=1+0=1$ und $1+1=0$. Überzeugen Sie sich davon, dass $(\mathbb{Z}_2,+)$ dadurch zu einer abelschen Gruppe wird.

Zeigen Sie, dass A eine Untergruppe von $\mathcal{S}_4$ ist, die isomorph zur Produktgruppe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ist