Prof. Dr. L. Schwachhöfer
Dr. F. Klinker

WS 2008/2009

Übungsblatt 4 zur Vorlesung
Lineare Algebra 1

Aufgabe 1:

a) Welche der folgenden Definitionen liefern Äquivalenzrelationen? Falls es sich um eine Äquivalenzrelation handelt, bestimmen Sie alle Äquivalenzklassen. Falls nicht, geben Sie an, welche ihrer Eigenschaften überleben.

   (i) $(\mathbb{Z}, \sim)$ mit $x \sim y :\Leftrightarrow x = y + a$ wobei $a \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.

   (ii) $(\mathbb{Z}, \sim)$ mit $x \sim y :\Leftrightarrow x \equiv y \mod 7$

   (iii) $(\mathbb{Z}, \sim)$ mit $x \sim y :\Leftrightarrow x$ teilt y

   (iii) $(\mathbb{Z}, \sim)$ mit $x \sim y :\Leftrightarrow (x \text{ teilt } y) \vee (y \text{ teilt } x)$

b) Sei R ein nullteilerfreier Ring. Zeigen Sie, dass bei der Konstruktion der Brüche die Definition

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc\,,$$

für $(a, b), (c, d) \in R \times (R \backslash \{0\})$, eine Äquivalenzrelation liefert.

Zur Erinnerung: Ein Ring heißt nullteilerfrei, wenn $\forall r, s : rs = 0 \Rightarrow (r = 0 \vee s = 0)$.

Aufgabe 2:

Es sei $(\mathbb{N}_0, +)$ die Halbgruppe der natürlichen Zahlen.

a) Zeigen Sie, dass

$$(n, m) \sim (n', m') :\Leftrightarrow n + m' = m + n'$$

auf $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ eine Äquivalenzrelation definiert. Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen $[(n, n)]$, $[(n + 1, n)]$ und $[(n, n + 1)]$ und geben Sie ein "möglich einfaches Element" in $[(n, m)]$ an.

b) Zeigen Sie, dass die Klasseneinteilung $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0/\sim$ durch

$$[(n, m)] \oplus [(n', m')] := [(n + n', m + m')]$$

zu einer Gruppe wird.

Aufgabe 3:

Wir betrachten weiter die Situation aus Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0/\sim$ durch

$$[(n, m)] \odot [(n', m')] := [(nn' + mm', nm' + mn')]$$

zu einem nullteilerfreien Ring wird.

Zusatz zu den Aufgaben 2 und 3: Erkennen Sie, zu welchem Ring $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0/\sim$ isomorph ist?

Hinweis zu den Aufgaben 2 und 3: Sie müssen insbesondere zeigen, dass die Verknüpfungen wohldefiniert sind.

<u>AUFGABE 4:</u>

Welche der folgenden Abbildungen sind lineare Abbildungen.

a) $F\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := x_1 + x_2 + \ldots + x_n\,.$

b) $F_a(x) := \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix}\,, a \in \mathbb{R}.$

c) $F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}\,.$

d) $F\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix} := x_1 x_2 + x_3 x_4 + \ldots + x_{2n-1} x_{2n}\,.$

e) $F\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ x_n \end{pmatrix}\,.$

f) $F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 \end{pmatrix}\,.$