Prof. Dr. L. Schwachhöfer
Dr. F. Klinker

WS 2008/2009

Übungsblatt 5 zur Vorlesung Lineare Algebra 1

Aufgabe 1:

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U \subset V$ ein Untervektorraum.

a) Zeigen Sie dass durch $v \sim w :\Leftrightarrow v - w \in U$ eine Äquivalenzrelation auf V definiert wird.

b) Zeigen Sie, dass $V/U := V/\sim$ mit

$$[v] + [w] := [v + w], \qquad \alpha \cdot [v] := [\alpha \cdot v]$$

für alle $[v], [w] \in V/U$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ zu einem $\mathbb{K}$-Vektorraum wird. Der Vektorraum V/U heißt Quotientenvektorraum.

c) Betrachten Sie die lineare Abbildung $\Phi : V \to V/U$ die durch $\Phi(v) := [v]$ definiert ist. Zeigen Sie, dass Φ surjektiv ist und berechnen Sie $ker(\Phi)$.

Aufgabe 2:

Welche der folgenden Mengen bilden eine Basis (Erzeugendensystem, linear unabhängige Menge)? Geben Sie gegebenenfalls eine Basis des aufgespannten Unterraums an.

a) $\{q_0, q_0 + q_1, q_1 + q_2, q_0 + q_1 + q_3\} \subset \mathbb{R}_3[x]$

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1+i \\ -i \\ 2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1-i \\ 2+2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1+2i \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{C}^3$

c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$

d) $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$

Zur Erinnerung: Die Abbildung $q_m \in \mathbb{R}[x]$ ist definiert durch $q_m(x) = x^m$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3:

a) Es seien V und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Zeigen Sie, dass das kartesische Produkt von V und W mit den folgenden Verknüpfungen

$$(v, w) + (v', w') := (v + v', w + w'), \qquad \alpha(v, w) := (\alpha v, \alpha w)$$

für $v, v' \in V$, $w, w' \in W$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ zu einem $\mathbb{K}$-Vektorraum wird. Dieser heißt die direkte Summe von V und W und wird mit $V \oplus W$ bezeichnet. Wie groß ist die Dimension von $V \oplus W$, wenn V und W endliche Dimension haben?

b) Es seien V und W zwei Untervektorräume des Vektorraums X . Zeigen Sie, dass die Mengen $V + W := \{v + w | v \in V, w \in W\}$ und $V \cap W$ ebenfalls Unterräume von X sind.

c) Es seien V und W zwei Untervektorräume des Vektorraums X. Zeigen Sie, dass die Vektorräume $V + W$ und $V \oplus W$ isomorph sind, wenn $V \cap W = \{0\}$.

Aufgabe 4:

a) Es sei V ein Vektorraum und $v_1, v_2, v_3 \in V$ seien linear unabhängig. Für welche reellen Zahlen α sind dann folgende Vektoren linear unabhängig?

$$\begin{aligned} w_1 &:= (\alpha - 1)v_2 + 2v_3\,, \\ w_2 &:= 2v_1 + (2\alpha - 3)v_2 + 4v_3\,, \\ w_3 &:= v_1 + (\alpha - 1)v_2 + v_3\,. \end{aligned}$$

b) Für welche $x_0, c \in \mathbb{R}$ ist $U(x_0, c) := \{q \in \mathbb{R}_n[x] | q(x_0) = c\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}_n[x]$?