Prof. Dr. L. Schwachhöfer
Dr. F. Klinker

WS 2008/2009

Übungsblatt 6 zur Vorlesung Lineare Algebra 1

Aufgabe 1:

Es seien U, V und W Vektorräume mit $U \subset V$ und $V \subset W$. Zeigen Sie:

a) V/U ist ein Unterraum von W/U.

b) Die Vektorräume $(W/U)/(V/U)$ und W/V sind isomorph.

Aufgabe 2:

Es sei $\mathcal{V}$ die Menge aller endlich dimensionalen Vektorräume. Die direkte Summe $\oplus$ (vgl. Blatt 5 Aufg. 3a) liefert eine nicht-assoziative, nicht-kommutative Verknüpfung auf $\mathcal{V}$ ohne neutralem Element. Definieren Sie auf $\mathcal{V}$ eine Äquivalenzrelation derart, dass die Erweiterung von $\oplus$ auf die Klasseneinteilung diese zu einer kommutativen Halbgruppe macht, die zu $(\mathbb{N}, +)$ isomorph ist. Geben Sie zu jeder Äquivalenzklasse einen möglichst einfachen Repräsentanten an.

Aufgabe 3:

a) Es sei U der von den Vektoren

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

aufgespannte Untervektorraum von $\mathbb{K}^5$. Bestimmen Sie eine Basis von U für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$.

b) Entscheiden Sie, ob die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}4\\6\\2\end{pmatrix}$ und $v_4 = \begin{pmatrix}2\\0\\6\end{pmatrix}$ ein Erzeugendensytem für $\mathbb{K}^3$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_7$ bilden. Geben Sie eine Basis für $span\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ an.

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie jeweils Basen von U, V, $U + V$ und $U \cap V$ für

$$U = span\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\5\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\6\\7\\-7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

$$V = span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\3\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\-3\\6\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\-6\\5\\0\end{pmatrix}\right\}$$