Prof. Dr. L. Schwachhöfer
Dr. F. Klinker

WS 2008/2009

Übungsblatt 7 zur Vorlesung Lineare Algebra 1

Aufgabe 1:

a) Begründen Sie, warum $U := \left\{x \in \mathbb{R}^5 \middle| 2x_1 + 3x_2 = 0, 2x_1 + 3x_3 = 0\right\}$ ein Untervektorraum ist.

b) Berechnen Sie (falls möglich) AB, $A + B$, $D + E$, BE, G^2, $(B - C)^3$, BG, GB, $3D - 2F$, $F + G$ und EF.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

c) Betrachten Sie die Matrix $C \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ mit $C_{i,i+1} = 1$ für $1 \le i \le n - 1$ und $C_{i,j} = 0$ sonst. Berechnen Sie die Potenzen C^k für $k \in \mathbb{N}$. Schreiben Sie alle Matrizen C^k im Fall $n = 4$ aus.

Aufgabe 2:

Zu der linearen Abbildung $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mit $\phi(x) = Ax$ und $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ -7 & 3 & 1 & 5 \\ -4 & -6 & -11 & -1 \\ 4 & -6 & -7 & -5 \end{pmatrix}$ geben Sie jeweils eine Basis des Bildes und des Kerns an.

Aufgabe 3:

Betrachten Sie die Abbildung δ auf der Menge $\mathbb{R}_n[x]$ die durch $p \mapsto \delta p$ mit

$$(\delta p)(x) := p(x + 1) - p(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

definiert ist.

a) Zeigen Sie dass das Bild von δ wieder in $\mathbb{R}_n[x]$ liegt und dass $\delta : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ eine lineare Abbildung ist.

b) Berechnen Sie für $0 \le j \le n$ die Bilder δq_j der Monome $q_j(x) = x^j$.

Aufgabe 4:

a) Bestimmen Sie zur linearen Abbildung δ aus der vorigen Aufgabe ein Matrix bezüglich der Basis $\{q_0, \ldots, q_n\}$ von $\mathbb{R}_n[x]$.

b) Berechnen Sie damit δp für $p(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x + 2$.

c) Bestimmen Sie $ker(\delta)$ und $Bild(\delta)$.