Prof. Dr. L. Schwachhöfer
Dr. F. Klinker

WS 2008/2009

Übungsblatt 8 zur Vorlesung Lineare Algebra 1

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen simultan (also in einem Schritt) die Inverse Matrix zu A (falls sie existiert) und alle Lösungen der Gleichungssysteme $Ax = b_i$ für $b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $b_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2:

a) Berechnen Sie $\begin{pmatrix} i & 0 & 2+i \\ 3 & 1 & 2i-1 \\ 1-i & 1+i & -13 \end{pmatrix}^{-1}$

b) Entscheiden Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Matrix $\begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ invertierbar ist, und geben Sie ggf. die inverse Matrix an.

Aufgabe 3:

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung derart, dass für alle $v \in V$ die Vektoren v und $\varphi(v)$ linear abhängig sind. Zeigen Sie, dass dann ein $\alpha \in \mathbb{K}$ existiert, so dass $\varphi = \alpha\,\mathrm{id}$.

Aufgabe 4:

Gegeben seien die reellen Funktionen $c_0(x) = 1$, $s_1(x) = \sin(x)$, $c_1(x) = \cos(x)$, $s_2(x) = \sin(2x)$ und $c_2(x) = \cos(2x)$. Es sei $V = \mathit{span}\{c_0, s_1, c_1, s_2, c_2\}$ der von ihnen aufgespannte Untervektorraum von $\mathit{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Weiter betrachten wir die Abbildungen $P, Q : V \to \mathbb{R}$ die durch $P(f) := f(0)$ und $Q(f) := f(\frac{\pi}{2})$.

a) Zeigen Sie, dass P und Q im Dualraum V^* von V liegen.

b) Geben Sie Marixdarstellungen für P und Q bezüglich der Basis $\{c_0, s_1, c_1, s_2, c_2\}$ von V und der Basis $\{1\}$ von $\mathbb{R}$ an.

c) Bestimmen Sie Basen für $ker(P)$, $ker(Q)$ und $\ker(P) \cap \ker(Q)$