Prof. Dr. L. Schwachhöfer
Dr. F. Klinker

WS 2008/2009

Übungsblatt 9 zur Vorlesung Lineare Algebra 1

Aufgabe 1:

Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum mit Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ und V^* sein Dualraum. Da eine lineare Abbildung durch Angabe der Bilder einer Basis erklärt ist, werden für $j = 1, \ldots, n$ durch $v_j^*(v_i) := \begin{cases} 1 \text{ falls } i = j \\ 0 \text{ falls } i \neq j \end{cases}$ lineare Abbildungen $v_j^* : V \to \mathbb{R}$ definiert.

Zeigen Sie, dass $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ eine Basis von V^* ist. Diese Basis heißt die zu $\{v_1, \ldots, v_n\}$ Duale Basis.

Aufgabe 2:

Es sei U ein Untervektorraum des endlichdimensionalen Vektorraums V. Wir definieren einen Untervektorraum des Dualraums V^* durch $U^\perp := \{f \in V^* \mid \forall u \in U : f(u) = 0\}$, dieser heißt Lotraum zu U (Überzeugen Sie noch einmal davon, dass $U^\perp$ wirklich ein Untervektorraum ist und dass das auch gilt, wenn man Vektorräume zulässt, die nicht endlichdimensional sind).

a) Es sei $\{u_1, \ldots, u_r\}$ eine Basis von U und $\{u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n\}$ ein Ergänzung zu einer Basis von V. Zeigen Sie $\dim U + \dim U^\perp = n$ indem Sie eine Basis von $U^\perp$ konstruieren.

b) Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

   i) $U^\perp$ und V/U sind isomorph (Geben Sie dazu auch einen Isomorphismus an!), $V^\perp = \{0\}$.

   ii) $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$, $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$.

   iii) $U_1 \subset U_2 \Rightarrow U_2^\perp \subset U_1^\perp$.

   iv) $V = U_1 \oplus U_2 \Rightarrow V^* = U_1^\perp \oplus U_2^\perp$.

Bemerkung zu b iv): Sind U_1 und U_2 zwei Untervektorräume des gleichen Vektorraums V und gilt $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ so ist $U_1 + U_2 \simeq U_1 \oplus U_2$. Man nennt dann die Summe von $U_1 + U_2 \subset V$ auch direkt und schreibt $U_1 \oplus U_2 \subset V$.

Aufgabe 3:

Es sei $f : M_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ eine lineare Abbildung derart, dass $f(AB) = f(BA)$ für alle $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ erfüllt ist. Zeigen Sie, dass unter dieser Voraussetzung eine Zahl $s \in \mathbb{K}$ existiert, so dass

$$f(A) = s(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}) \text{ für alle } A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in M_{n,n}(\mathbb{K}).$$

Hinweis: Nutzen Sie eine geeignete Basis für $M_{n,n}(\mathbb{K})$ und betrachten Sie speziell Matrizen, die elementaren Zeilen- bzw Spaltenoperationen entsprechen.

AUFGABE 4:

Gegeben seien die Basen

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\} \text{ und } \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

des $\mathbb{R}^4$. Wir betrachten weiter die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mit

$$f(x, y, z, t) := (4x - 4z, 2x - 4t, 2x + 2z, 2y - 2t)$$

sowie die Matrix $T := \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\0 & 1 & 0 & -1\\1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

(Überzeugen Sie sich zunächst davon, dass f bezüglich der Basis $\mathcal{B}_1$ die Matrixdarstellung $\begin{pmatrix}4 & 0 & -4 & 0\\2 & 0 & 0 & -4\\2 & 0 & 2 & 0\\0 & 2 & 0 & -2\end{pmatrix}$

und dass $T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1\\-1 & 0 & 1 & 0\\0 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ ist).

a) Begründen Sie, warum T die Matrixdarstellung der identischen Abbildung auf $\mathbb{R}^4$ ist, wobei $\mathcal{B}_2$ die Basis im Urbildraum und $\mathcal{B}_1$ diejenige im Bildraum ist.

b) Geben Sie eine Matrixdarstellung der identischen Abbildung auf $\mathbb{R}^4$ an, wobei im Gegensatz zu a) die Rolle von $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ vertauscht ist. Begründen Sie Ihre Wahl.

b) Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen der linearen Abbildung f und der Matrix $T^{-1}A$. Berechnen Sie diese.

c) Geben Sie eine Matrixdarstellungen von f (i) bezüglich der Basis $\mathcal{B}_2$ im Urbildraum und $\mathcal{B}_1$ im Bildraum, sowie (ii) bezüglich der Basis $\mathcal{B}_2$ im Urbild- und Bildraum an. Begründen Sie Ihr Vorgehen.