Prof. Dr. L. Schwachhöfer
Dr. F. Klinker

WS 2008/2009

Übungsblatt 10 zur Vorlesung Lineare Algebra 1

Aufgabe 1:

Es sei V ein Vektorraum und U ein Untervektorraum und $U^\perp \subset V^*$ sei sein Lotraum gemäß Blatt 9 Aufgabe 2. Weiter ist aus der Vorlesung bekannt, dass die Abbildung $\Phi : V \to (V^*)^*$ mit $\Phi(v)(f) := f(v)$ für alle $f \in V^*$ linear ist. Zeigen Sie:

a) Ist V endlichdimensional, so gilt $U = \bigcap_{f \in U^\perp} ker(f)$.

b) $\Phi(U) \subset (U^\perp)^\perp$ und ist V endlichdimensional, so ist $\Phi : U \to (U^\perp)^\perp$ ein Isomorphismus.

Aufgabe 2:

Es sei $\phi : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $\phi \circ \phi = \phi$. Eine Abbildung mit dieser Eigenschaft heißt Idempotent. Zeigen Sie:

a) ϕ ist ganau dann idempotent, wenn dies für $id_V - \phi$ gilt.

b) Ist ϕ idempotent, so gilt $V = ker(\phi) \oplus Bild(\phi)$.

c) Sind $X, Y \subset V$ Untervektorräume mit $V = X \oplus Y$ so existiert genau eine idempotente Abbildung ϕ mit $X = ker(\phi)$ und $Y = Bild(\phi)$.

Aufgabe 3:

Für $p \in \mathbb{R}[x]$ sei $f' \in \mathbb{R}[x]$ wie gewöhnlich die Ableitung von f. Wir definieren Abbildungen $\psi_1, \psi_2 : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ durch

$$\psi_1(p) = 2p(0) + p'(1) \quad \text{und} \quad \psi_2(p) = \int_0^1 p(x)dx\,.$$

a) Zeigen Sie, dass ψ_1 und ψ_2 in $\mathbb{R}[x]^*$ liegen und, dass sie dort linear unabhängig sind.

b) Konstruieren Sie ein lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}[x]$ derart, dass $\Phi^*(\psi_1)$ und $\Phi^*(\psi_2)$ in $(\mathbb{R}^2)^*$ linear unabhängig sind.

c) Geben Sie ein Basis des Unterraums $ker(\psi_1) \cap ker(\psi_2) \cap \mathbb{R}_2[x] \subset \mathbb{R}[x]$ an.

AUFGABE 4:

Aus der Vorlesung wissen Sie, dass zu jeder Matrix $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ eine natürliche Zahl k und zwei invertierbare Matrix $Z, S \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ existieren, so dass

$$ZAS = E_k, \quad \text{mit} \quad E_k := \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix} 1 \\ \ddots \\ 1 \end{matrix}}\right\} k \\ \vphantom{\begin{matrix} 0 \\ \ddots \\ 0 \end{matrix}} \end{array} \in M_{n,n}(\mathbb{K})\,.$$

Es sei nun $f : M_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ eine nicht-konstante Abbildung mit $f(AB) = f(A)f(B)$ für alle $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$. Zeigen Sie, dass unter diesen Vorgaben folgendes erfüllt ist:

a) Es seien nun P_i^j die in der Vorlesung definierten Permutationsmatrizen. Ferner sei $E \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ eine Matrix, auf deren Diagonale sich an beliebigen Stellen genau k Einsen befinden, in der aber alle anderen Einträge Null sind. Zeigen Sie:

   Es gibt eine Matrix Q, so dass Q ein Produkt von Permutationsmatrizen ist und $QEQ^t = E_k$.

b) $f(I_n) = 1$, $f(0) = 0$ sowie $f(QQ^t) = 1$ und $f(E) = f(E_k)$ für alle Matrizen Q, E gemäß a).

c) $f(E_k) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = n, \text{ also } E_k = I_n \\ 0 & \text{falls } 0 \le k < n \end{cases}.$

d) Für alle $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ gilt:

$$A \text{ ist regulär} \Leftrightarrow f(A) \neq 0\,.$$

Hinweis zu c): Berechnen Sie $f(E_1)^2, f(E_2)^2, \ldots$ und nutzen Sie b).

Hinweis zu d): Nutzen Sie c) und die Vorbemerkung..