Prof. Dr. L. Schwachhöfer
Dr. F. Klinker

WS 2008/2009

Übungsblatt 11 zur Vorlesung Lineare Algebra 1

Aufgabe 1:

Es sei $D_2 : M_{2,2}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ die aus der Vorlesung bekannte Determinante, die für $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ durch $D_2(A) := ad - bc$ definiert ist.

a) Zeigen Sie, dass D_2 eine Determinantenfunktion ist.

b) Zeigen Sie, dass für zwei Matrizen $A, B \in M_{2,2}(\mathbb{K})$

$$D_2(AB) = D_2(A)D_2(B)$$

gilt und folgern Sie damit, dass A genau dann invertierbar ist, wenn $D_2(A) \neq 0$.

Aufgabe 2:

Es sei $D_3 : M_{3,3}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ die Abbildung, die für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ durch

$$D_3(A) := a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

definiert ist.

a) Berechnen Sie $D_3 \begin{pmatrix} 2i & 1+i & 0 \\ 2 & i & 2 \\ 1 & 2i & 1 \end{pmatrix}$.

b) Zeigen Sie dass D_3 eine Determinantenfunktion auf $M_{3,3}(\mathbb{K})$ definiert.

c) Zeigen Sie mit Hilfe der Eigenschaften einer Determinantenfunktion, dass $A \in M_{3,3,}(\mathbb{K})$ genau dann invertierbar ist, wenn $D_3(A) \neq 0$.

Aufgabe 3:

Für $A \in M_{3,3}(\mathbb{K})$ sei $A^{[ij]} \in M_{2,2}(\mathbb{K})$ die Matrix, die aus A entsteht, wenn man die i-te Zeile und die j-te Spalte streicht. Zeigen Sie, dass folgende Formeln gelten:

$$D_3(A) = a_{11}D_2(A^{[11]}) - a_{12}D_2(A^{[12]}) + a_{13}D_2(A^{[13]}),$$
$$D_3(A) = a_{11}D_2(A^{[11]}) - a_{21}D_2(A^{[21]}) + a_{31}D_2(A^{[31]})\,.$$

Aufgabe 4:

Wir betrachten die Abbildung $k : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to (\mathbb{R}^3)^*$, $(v, w) \mapsto k(v, w)$ mit

$$k(v, w)(x) := D_3(v, w, x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$$

wobei die Determinante dreier Vektoren v, w, x zu verstehen ist, als die Determinante der Matrix, die die drei Vektoren als Spalten hat. Zeigen Sie:

a) $k(v,w) = -k(v,w)$.

b) $k(v,w) = 0$ genau dann, wenn v und w linear abhängig.

c) $k(v,w)(x) = k(x,v)(w) = k(w,x)(v)$.

d) $k(v,w) \in (span\{v,w\})^{\perp}$.

e) Für $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ ist

$$k(v,w) = \left(D_2 \begin{pmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix}, -D_2 \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix}, D_2 \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} \right)$$