Prof. Dr. L. Schwachhöfer
Dr. F. Klinker

WS 2008/2009

Übungsblatt 12 zur Vorlesung Lineare Algebra 1

Aufgabe 1:

Es sei $U := span\{e_1 - e_3, e_2 + e_4\} \subset \mathbb{R}^4$. Geben Sie ein Basis von $U^\perp \subset (\mathbb{R}^4)^*$ an und finden Sie die duale Basis zur Basis $\{e_1 - e_3, e_2 + e_4, e_1, e_2\}$ von $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie für $x, y \in \mathbb{R}^n$ die Größe der Matrizen $x^t y$ und xy^t und zeigen Sie $(xy^t)^2 = (y^t x)(xy^t)$ sowie $(x^t x = 0 \vee xx^t = 0) \Leftrightarrow x = 0$

b) Zeigen Sie, dass für $x, y \in \mathbb{R}^n$ die Matrix xy^t genau dann symmetrisch ist, wenn x und y linear abhängig sind (Dabei heißt eine Matrix A *symmetrisch*, wenn $A^t = A$). Zeigen Sie außerdem, dass $Rang(xy^t) = 1$ falls $x, y \neq 0$.

c) Formulieren Sie eine Bedingung an x und y, so dass $I_n - xy^t$ invertierbar ist. Bestimmen Sie dazu eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass $(I_n - xy^t)^{-1} = I_n + \alpha xy^t$.

d) Es sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ invertierbar. Zeigen Sie mit c), dass die inverse Matrix zu $A - xy^t$ existiert, wenn $x^t A^{-1} y \neq 1$. Geben Sie die inverse Matrix in diesem Fall an.

Aufgabe 3:

Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor mit der Eigenschaft $x^t x = 1$ und $H := I_n - 2xx^t \in M_{n,n}(\mathbb{R})$.

a) Zeigen Sie, dass jeder Vektor $y \in \mathbb{R}^3$ eine Zerlegung $y = \alpha x + w$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt, in der $x^t w = 0$ gilt. Geben Sie diese Zerlegung an.

b) Berechnen Sie $H \circ H$ und zeigen Sie, dass $H(y) = -\alpha x + w$ für $y = \alpha x + w$ gemäß a).

c) Geben Sie eine geometrische Interpretation für H in dem Fall, dass $x = e_3 \in \mathbb{R}^3$ ist.

Aufgabe 4:

a) Zeigen Sie, dass $U_1 := \{A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \,|\, A^t = A\}$ und $U_2 := \{A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \,|\, A^t = -A\}$ Untervektorräume von $M_{n,n}(\mathbb{R})$ sind, und dass $M_{n,n}(\mathbb{R}) = U_1 \oplus U_2$.

b) (i) Zeigen Sie, dass die Menge $U := \{A \in M_{n,n}(\mathbb{C}) \,|\, a_{ij} = 0 \ \forall i > j\}$ ein Unterring von $M_{n,n}(\mathbb{C})$ ist.

(ii) Es sei $A := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ mit $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$. Finden Sie eine Matrix $B \in M_{3,3}(\mathbb{C})$, so dass $B^2 = A$.